Topologie

Série 1

Espaces topologiques

1. Espaces métriques

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que toute boule pointé $\dot{B}(a, r)$, pour $a \in X$ et $r > 0$, est ouverte dans X.

Exercice 2. Vrai ou faux. Soit (X, d) un espace métrique et U_i $(i \in I)$ des ouverts de X. Alors $\bigcap_{i \in I} U_i$ n'est pas ouvert dans X.

Solution. Faux. Il faut faire attention au raisonnement logique. En classe, on a montré que si l'intersection est fini, alors l'intersection est un ouvert de X. **Mais cela n'implique pas qu'une intersection infini n'est nécessairement pas un ouvert de X.**

Par exemple, si on prend $I = \mathbb{N}$ et $U_i = X$ pour tout $i \in I$, on a $\bigcap_{i \in I} U_i = X$, et X est bien ouvert dans X.

Exercice 3. Ouvert relatif. Soit (X, d) un espace métrique et $E \subseteq Y \subseteq X$. Montrer que, lorsque (Y, d) est un sous-espace métrique, on a

$$E \text{ est ouvert dans } Y \Leftrightarrow \text{il existe } U \text{ ouvert dans } X \text{ tel que } E = U \cap Y.$$

Solution. D'abord, on pose $B_Y(a, r) := \{x \in Y \mid d(a, x) < r\}$, la boule ouverte dans Y, et $B_X(a, r) := \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$, la boule ouverte dans X. Il est clair que $B_Y(a, r) = Y \cap B_X(a, r)$. (Si ce n'est pas clair, montrez-le.)

$\Rightarrow$) Puisque E est ouvert dans Y, pour chaque $y \in E$, il existe $r_y > 0$ tel que $B_Y(y, r_y) \subseteq E$. On pose

$$U := \bigcup_{y \in E} B_X(y, r_y).$$

C'est un ouvert de X, puisque c'est une union d'ouverts de X. De plus, on a

$$U \cap Y = \left(\bigcup_{y \in E} B_X(y, r_y)\right) \cap Y = \bigcup_{y \in E} \Big(B_X(y, r_y) \cap Y\Big) = \bigcup_{y \in E} B_Y(y, r_y) = E.$$

$\Leftarrow$) On suppose qu'il existe un ouvert U de X tel que $E = U \cap Y$. Puisque U est ouvert dans X, pour chaque $x \in U$, il existe $r_x > 0$ tel que $B_X(x, r_x) \subseteq U$. Si $x \in E$, on a alors que $B_Y(x, r_x) \subseteq U$ et $B_Y(x, r_x) \subseteq Y$, donc on a également $B_Y(x, r_x) \subseteq U \cap Y = E$. Il suit que x est un point intérieur à E. Comme x était quelconque, on conclut que E est ouvert dans Y.

Exercice 4. a) Dans $[0, \infty)$, caluler $[0, 1)^\circ$.

b) Montrer qu'il existe U ouvert dans $[0, \infty)$ tel que $[0, 1) = [0, \infty) \cap U$.

c) $[0, 1)$ est-il ouvert dans $[0, \infty)$?

Solution. a) Il suffit de constater que $[0, \infty) \cap (-1, 1) = [0, -1)$. Puisque $(-1, 1)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ et que $[0, \infty)$ est un sous-espace métrique de $\mathbb{R}$, il suit que $[0, 1)$ est ouvert dans $[0, \infty)$ (mais pas dans $\mathbb{R}$!). Comme $[0, 1)$ est ouvert dans $[0, \infty)$, il suit que $[0, 1)^\circ = [0, 1)$.

Cela dit, faisons l'exercice à partir de la définition de l'intérieur. Si $x \in (0, 1)$, alors avec $r = \min\{x, 1 - x\}$, on a $r > 0$ et $B(x, r) \subseteq (0, 1) \subset [0, 1)$, donc $x \in [0, 1)^\circ$. Si $x = 0$, alors on a $B(0, 1) \subseteq [0, 1)$. En effet, par définition,

$$B(0, 1) = \{y \in [0, 1) \mid |y - 0| < 1\} = \{y \in [0, 1) \mid y < 1\} = [0, 1).$$

Il suit que $0 \in [0, 1)^\circ$.

b) Déjà fait au a).

c) Oui. Le a) le montre directement, le b) le montre avec la propriété des ouverts relatifs.

Exercice 5. Soit $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

a) S^1 est-il ouvert dans $\mathbb{R}^2$?

b) S^1 est-il ouvert dans $\overline{B}\big((0, 0), 1\big)$?

c) S^1 est-il ouvert dans $\overline{B}\big((0, 0), 1\big) \setminus B\big((0, 0), 1\big)$?

Solution. a) Non. Par exemple, quelque soit $r > 0$, on a $(1, r/2) \in B\big((1, 0), r\big)$, donc $B\big((1, 0), r\big) \not\subseteq S^1$. Comme r est quelconque, on conclut que $(1, 0) \notin (S^1)^\circ$, d'où S^1 n'est pas ouvert.

b) Non. Même démarche, mais on peut prendre $(1, -r/2)$, qui est dans $\overline{B}\big((0, 0), 1\big)$, mais pas dans S^1.

c) Oui, car $\overline{B}\big((0, 0), 1\big) \setminus B\big((0, 0), 1\big) = S^1$.

Exercice 6. Soit $U_n = (0, 1 + 1/n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que U_n est ouvert dans $\mathbb{R}$ pour tout n, mais que $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.

Solution. On a vu en classe qu'un intervalle ouvert est ouvert dans $\mathbb{R}$, donc chaque U_n est ouvert dans $\mathbb{R}$.

Montrons que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n = (0, 1]$. D'une part, on voit que $(0, 1] \subseteq U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc on a bien $(0, 1] \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n$.

D'autre part, si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$, alors $0 < x < 1+1/n$ pour tout n. Il suit que $0 < x \leq 1$, c'est-à-dire que $x \in (0,1]$, d'où $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n \subseteq (0,1]$.

On a vu en classe que $(0,1]$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$. En effet, son intérieur est $(0,1)$. D'où $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}^*$.

Les exercices 7 et 8 sont optionnels. Ils sont sensés être des rappels de mathématique discrète. Vous êtes tout de même encouragé·e à les faire.

Exercice 7. Soit X, Y des ensembles, soit I un ensemble d'indices et pour chaque $i \in I$, soit $A_i \subseteq X$ et $B_i \subseteq Y$ des sous-ensembles. Soit $f\colon X \to Y$ une fonction. Montrer les inclusions d'ensembles suivants.

a) $f^{-1}(\cup_{i\in I} B_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

b) $f^{-1}(\cap_{i\in I} B_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

c) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$ pour tout $B_1, B_2 \subseteq Y$

d) $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$ pour tout $B \subseteq Y$

e) $f(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} f(A_i)$

f) $f(\cap_{i\in I} A_i) \subseteq \cap_{i\in I} f(A_i)$

g) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$ pour tout $A_1, A_2 \subseteq X$

h) si f est injective, alors il y a égalité au f)

i) si pour tout $A_1, A_2 \subseteq X$, on a $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, alors f est injective

j) si f est injective, alors il y a égalité au g)

k) si pour tout $A_1, A_2 \subseteq X$, on a $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$, alors f est injective.

Solution. a) Soit $x \in f^{-1}(\cup_{i\in I} B_i)$. Par définition, on a $f(x) \in \cup_{i\in I} B_i$. Ainsi, il existe i_0 tel que $f(x) \in B_{i_0}$. Il suit que $x \in f^{-1}(B_{i_0})$ et donc que $x \in \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$. On conclut que $f^{-1}(\cup_{i\in I} B_i) \subseteq \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

Pour l'inclusion dans l'autre sens, soit $x \in \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$. Il existe i_0 tel que $x \in f^{-1}(B_{i_0})$. Ainsi, on a $f(x) \in B_{i_0} \subseteq \cup_{i\in I} B_i$. On a donc que $x \in f^{-1}(\cup_{i\in I} B_i)$. Conclusion : $f^{-1}(\cup_{i\in I} B_i) \supseteq \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

f) Soit $y \in f(\cap_{i\in I} A_i)$. Il existe $x \in \cap_{i\in I} A_i$ tel que $y = f(x)$. Puisque $x \in A_i$ pour tout i, on a que $y \in f(A_i)$ pour tout i, d'où $y \in \cap_{i\in I} f(A_i)$. On a bien l'inclusion.

Pour voir que l'inclusion peut être stricte, il faut une fonction qui ne soit pas injective. On prend $f(x) = x^2$. Avec $A_1 = [-1, 0]$ et $A_2 = [0, 1]$, on obtient $A_1 \cap A_2 = \{0\}$ et donc $f(\{0\}) = \{0\}$. Par contre, on a $f(A_1) = [0,1]$ et $f(A_2) = [0,1]$ et donc $f(A_1) \cap f(A_2) = [0,1]$.

h) Soit $y \in \cap_{i\in I} f(A_i)$. Alors $y \in f(A_i)$ pour chaque i. Il existe $x_i \in A_i$ tel que $f(x_i) = y$. Puisque f est injective, on a $x_i = x_j = x$ pour tout $i, j \in I$. Ainsi, comme $x \in \cap_{i\in I} A_i$, on a $y = f(x) \in f(\cap_{i\in I} A_i)$.

i) On suppose le contraire, alors il existe x_1 et x_2 distincts tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On pose $A_1 = \{x_1\}$ et $A_2 = \{x_2\}$. On a donc $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et $f(A_1) = f(A_2)$, ce qui est une contradiction.

Exercice 8. Soit X, Y des ensembles et $f\colon X \to Y$ une fonction.

a) Est-ce que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$ pour tout $B \in Y$?

b) Est-ce que $f\big(f^{-1}(B)\big) \supseteq B$ pour tout $B \in Y$?

c) Est-ce que $f^{-1}\big(f(A)\big) \subseteq A$ pour tout $A \in X$?

d) Est-ce que $f^{-1}\big(f(A)\big) \supseteq A$ pour tout $A \in X$?

e) Pour les énoncés dont la réponse est non, quelle condition sur f est nécessaire et suffisante afin que la réponse devienne oui ?

Solution. (Solutions partielles, à vous de remplir les détails)

a) Oui b) Non c) Non d) Oui

e) Au b), f surjective fait l'affaire. Au c), f injective est fait l'affaire.

Exercice 9. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si $f^{-1}\big((a,b)\big)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ pour tout $-\infty < a < b < \infty$, alors f est continue.

Solution. Soit U ouvert dans $\mathbb{R}$. Alors, on sait qu'il existe (a_i, b_i) avec $i \in I$ tels que $U = \bigcap_{i \in I}(a_i, b_i)$. Par l'exercice 4a), on a alors

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I}(a_i, b_i)\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}\big((a_i, b_i)\big).$$

Par hypothèse, $f^{-1}\big((a_i, b_i)\big)$ est ouvert pour chaque $i \in I$. Comme l'union d'ouverts est ouvert, il suit que $f^{-1}(U)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$, d'où f est continue.

Exercice 10. Montrer que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est continue en utilisant la définition équivalente avec les ouverts.
Indice. Utiliser l'exercice précédent.

Solution. Soit $-\infty < a < b < \infty$. Si $b < 0$, alors $f^{-1}\big((a,b)\big) = \emptyset$, puisque $f(x) \geq 0$.

Si $a \geq 0$, alors on a

$$\begin{aligned} a < f(x) < b \quad &\Leftrightarrow \quad a < x^2 < b && \left(\begin{array}{l}\text{car } \sqrt{\cdot} \text{ et } \cdot^2 \text{ sont} \\ \text{croissantes sur } [0,\infty)\end{array}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{a} < |x| < \sqrt{b} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{a} < x < \sqrt{b} \quad \text{ou} \quad \sqrt{a} < -x < \sqrt{b}, \end{aligned}$$

donc $f^{-1}\big((a,b)\big) = (-\sqrt{b}, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \sqrt{b})$, qui est ouvert dans $\mathbb{R}$.

Si $a < 0$, alors on trouve

$$\begin{aligned} a < f(x) < b \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \leq f(x) < b \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq x^2 < b \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{0} \leq |x| < \sqrt{b} \\ &\Leftrightarrow \quad -\sqrt{b} \leq x < \sqrt{b}, \end{aligned}$$

donc $f^{-1}\big((a,b)\big) = (-\sqrt{b}, \sqrt{b})$, qui est ouvert dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, par le numéro précédent, comme $f^{-1}\big((a,b)\big)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ pour tout intervalle (a,b), on conclut que f est continue.

Exercice 11. Trouver un exemple d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et d'un ouvert U tels que $f(U)$ n'est pas ouvert.

Solution. Les exemples sont nombreux. Un exemple simple est de prendre $f(x) = 0$ pour tout x. Alors $f(\mathbb{R}) = \{0\}$, $\mathbb{R}$ est ouvert dans $\mathbb{R}$, mais $\{0\}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Soit X, Y, Z des ensembles et $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ des fonctions. a) Montrer que pour tout $A \subseteq Z$, on a $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\big(g^{-1}(A)\big)$.

b) Supposons maintenant que (X, d), (Y, d') et (Z, d'') sont espaces métriques. Montrer que si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

Solution. a) Par définition de la préimage, pour une fonction h et un ensemble S, on a $x \in h^{-1}(S) \quad \Leftrightarrow \quad h(x) \in S$.

On a $z \in (g \circ f)^{-1}(A) \quad \Leftrightarrow \quad g \circ f(z) \in A \quad \Leftrightarrow \quad g\big(f(z)\big) \in A \quad \Leftrightarrow \quad f(z) \in g^{-1}(A) \quad \Leftrightarrow \quad z \in f^{-1}\big(g^{-1}(A)\big)$.

b) Soit U un ouvert de Z. On a $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}\big(g^{-1}(U)\big)$. Puisque g est continue, on sait que $g^{-1}(U)$ est ouvert dans Y. Puisque f est continue et que $g^{-1}(U)$ est ouvert dans Y, il suit que $f^{-1}\big(g^{-1}(U)\big)$ est ouvert dans X, d'où $(g \circ f)^{-1}(U)$ est ouvert dans X.

2. Espaces topologiques

Exercice 13. Pour chaque $\tau \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ suivant, déterminer si c'est une topologie ou non sur $\mathbb{R}$.

a) $\tau = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$

b) $\tau = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ borné}^*\} \cup \{\mathbb{R}\}$

c) $\tau = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A^c \text{ est fini}\} \cup \{\emptyset\}$

d) $\tau = \{(-a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$

*Rappel : borné veut dire qu'il existe $r > 0$ tel que $A \subseteq B(0, r)$.

Solution. a) Oui b) Non c) Oui d) Oui

Je vous laisse remplir les détails.

Exercice 14. Soit X un ensemble et τ et τ' deux topologies sur X. Montrer que $\tau \cap \tau' = \{A \subseteq \mathcal{P}(X) \mid A \in \tau \text{ et } A \in \tau'\}$ est une topologie sur X.

Exercice 15. Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ qui vérifie les propriétés d'une base : 1. pour tout $x \in X$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B$ et 2. pour tout $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et pour tout $x \in B_1 \cap B_2$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

a) On définit $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ par $U \in \tau$ si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq U$. Montrer que τ est une topologie sur X.

b) Montrer que $\tau = \tau(\mathcal{B})$.

c) Déduire que U est ouvert dans X si et seulement si U est une union d'éléments de $\mathcal{B}$.

Solution. a) 1. Pour tout $x \in X$, il existe $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x$. On a donc

$$X = \bigcup_{x \in X} B_x,$$

d'où $X \in \tau$. De plus, $\emptyset \in \tau$ par vacuité.

2. Soit $U_i \in \tau$ $(i \in I)$. On pose $U := \bigcup_{i \in I} U_i$. Soit $x \in U$. Il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Comme $U_{i_0} \in \tau$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq U_{i_0}$. De plus, il est clair que $U_{i_0} \subseteq U$, donc on a bien $x \in B \subseteq U_{i_0} \subseteq U$. Comme x est arbitraire, on a $U \in \tau$.

3. Soit $U_1, \ldots, U_n \in \tau$. On pose $U := U_1 \cap \cdots \cap U_n$. Si U est vide, alors $U \in \tau$. Sinon, soit $x \in U$. Alors $x \in U_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Pour chaque i, il existe $B_i \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_i \subseteq U_i$. On pose $B := B_1 \cap \cdots \cap B_n$. On a alors $B \subseteq U_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$, donc $x \in B \subseteq U_1 \cap \ldots \cap U_n = U$. D'où $U \in \tau$.

Concluson : τ est une topologie sur X.

b) Puisque $B \in \tau$ pour tout $B \in \mathcal{B}$, on doit avoir $\tau(\mathcal{B}) \subseteq \tau$, car $\tau(\mathcal{B})$ est la topologie la plus grossière qui contient $\mathcal{B}$.

On veut maintenant montrer que $\tau \subseteq \tau(\mathcal{B})$. Soit $U \in \tau$. Par définition de τ, pour tout $x \in U$, il existe $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subseteq U$. On a donc

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x.$$

Or, chaque $B_x \in \tau(\mathcal{B})$ et comme $\tau(\mathcal{B})$ est une topologie, l'union des B_x est aussi dans $\tau(\mathcal{B})$, d'où $U \in \tau(\mathcal{B})$ et donc $\tau \subseteq \tau(\mathcal{B})$.

Conclusion : $\tau = \tau(\mathcal{B})$.

c) On a déjà démontré ce fait au b). Pour chaque $x \in U$, il existe $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subseteq U$, donc on a

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x.$$

Exercice 16. Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{A} = \{\{x\} \mid x \in X\}$.

a) Décrire les ouverts de $\tau(\mathcal{A})$. (C'est-à-dire faire la liste de tous les ouverts.)

b) $\mathcal{A}$ est-il une base de $\tau(\mathcal{A})$?

Exercice 17. Soit (X, τ) un espace topologique et $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un ensemble de sous-ensembles qui vérifie

i) $\tau = \tau(\mathcal{B})$;

ii) pour tout $x \in X$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B$;

iii) si $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$, alors $B_1 \cap \cdots \cap B_n \in \mathcal{B}$.

a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de τ.

b) Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ qui vérifie i et ii. Montrer qu'il existe $\mathcal{B}$ tel que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est une base de $\tau(\mathcal{A})$.

c) Déduire que $U \in \tau(\mathcal{A})$ si et seulement s'il existe $A_{i,1}, A_{i,2}, \ldots, A_{i,k_i} \in \mathcal{A}$, avec $i \in I$ et $k_i \in \mathbb{N}$ tel que

$$U = \bigcup_{i \in I} (A_{i,1} \cap A_{i,2} \cap \cdots \cap A_{i,k_i}),$$

c'est-à-dire que U est une union quelconque d'intersections finis d'éléments de $\mathcal{A}$.

Solution. a) Il faut de montrer que pour tout $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et pour tout $x \in B_1 \cap B_2$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$. Il suffit de prendre $B := B_1 \cap B_2$. En effet, $x \in B_1$ et $x \in B_2$, donc $x \in B$ et $B \subseteq B_1 \cap B_2$.

b) On définit $\mathcal{B}$ par $B \in \mathcal{B}$ si et seulement si il existe $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tels que $B = A_1 \cap \cdots \cap A_n$. On a alors $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

Ensuite, on veut montrer que $\tau(\mathcal{A}) = \tau(\mathcal{B})$. Il est clair que $\tau(\mathcal{A}) \subseteq \tau(\mathcal{B})$, puisque $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

Soit $U \in \tau(\mathcal{B})$. Par le numéro 15c), il existe $B_i \in \mathcal{B}$ tels que $U = \bigcup_{i \in I} B_i$. Pour chaque i, il existe $A_{i,1}, \ldots, A_{i,k_i} \in \mathcal{A}$ ($k_i \in \mathbb{N}$) tels que $B_i = A_{i,1} \cap \cdots \cap A_{i,k_i}$. Comme $A_{i,j} \in \tau(\mathcal{A})$ et que $\tau(\mathcal{A})$ est une topologie, il suit que $B_i \in \tau(\mathcal{A})$. Comme U est une union des B_i, on conclut que $U \in \tau(\mathcal{A})$. D'où $\tau(\mathcal{A}) = \tau(\mathcal{B})$.

c) On l'a déjà démontré au paragraphe précédent.

Exercice 18. Soit $\mathcal{A} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

a) Décrire la topologie $\tau(\mathcal{A})$ sur $\mathbb{R}$. (On l'appelle la *topologie de la limite inférieur.*)

b) Cette topologie est-elle plus fine ou moins fine que la topologie standard ?

Solution. a) Vérifions d'abord que $\mathcal{A}$ est une base. Il est clair que $\mathcal{A}$ engendre la topologie. Ensuite, si $x \in \mathbb{R}$, on a $x \in [x, a+1) \in \mathcal{A}$. Enfin, pour $[a, b), [c, d) \in \mathcal{A}$, ils s'intersectent si et seulement si $c \in [a, b)$ ou $b \in [c, d)$. Dans chaque cas, on obtient un intervalle de la forme $[x, y)$, qui est dans $\mathcal{A}$.

Ainsi, un ouvert de $\tau(\mathcal{A})$ s'écrit de la form

$$U = \bigcup_{i\in I}[a_i, b_i).$$

b) La topologie $\tau(\mathcal{A})$ est plus fine que la topologie standard de $\mathbb{R}$. En effet, il suffit de montrer que $(a, b) \subseteq \tau(\mathcal{A})$, car $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ génère la topologie standard de $\mathbb{R}$. On a

$$(a, b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [a + 1/n, b).$$

En effet, posons $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[a-1/n, b)$. Si $x \in (a, b)$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x-a > \frac{1}{N}$ (on peut prendre, par exemple, $N := \lfloor\frac{1}{x-a}\rfloor+1$) et donc $x > a+\frac{1}{N}$, d'où $x \in [a-1/N, b) \subseteq U$ et $(a, b) \subseteq U$. D'autre part, chaque $[a - 1/n, b) \subseteq (a, b)$, donc $U \subseteq (a, b)$.

Comme (a, b) s'écrit comme une union d'ouverts de $\tau(\mathcal{A})$, il suit que $(a, b) \in \tau(\mathcal{A})$.

Exercice 19. Soit $f\colon (X, \tau) \to (Y, \tau')$ une fonction entre deux espaces topologiques. Montrer que f est continue si et seulement si $f^{-1}(F)$ est fermé dans X pour tout F fermé dans Y.

Exercice 20. Soit X et Y des ensembles.

a) (Topologie finale) Soit τ_X une topologie sur X et $f\colon (X, \tau_X) \to Y$. Montrer que $\tau' := \{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \text{ est ouvert dans } X\}$ est une topologie sur Y.

b) (Topologie initiale) Soit τ_Y une topologie sur Y. Soit $f\colon X \to (Y, \tau_Y)$. Montrer que $\tau := \{f^{-1}(U) \subseteq X \mid U \text{ est ouvert dans } Y\}$ est une topologie sur X.

Exercice 21. Soit $X = [0, 1]$ un intervalle muni de la topologie standard. On considère la relation $\sim$ sur X définie par $x \sim y \Leftrightarrow [x = y \text{ ou } x = 0, y = 1 \text{ ou } x = 1, y = 0]$. (Ici, ce sont des « ou » exclusifs.)

a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

b) Décrire la topologie sur $X/\sim$. (Par exemple, donner une base de sa topologie.)

c) Soit $f\colon X/\sim \to \mathbb{R}$ définie par $f([x]) = \sin(2\pi x)$, où $[x]$ est la classe d'équivalence de x. Montrer que f est bien définie et que f est continue.
Rappel. Pour que f soit bien définie, il faut que pour tout $[x], [y] \in X/\sim$, si $[x] = [y]$, alors $f([x]) = f([y])$. Remarquez que $[x] = [y]$ ssi $x \sim y$.

Solution. c) Commençons avec des dessins.

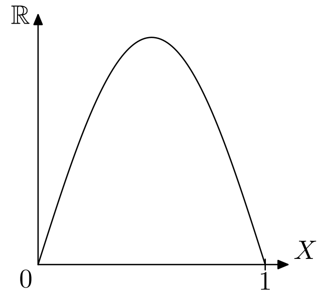


Figure. Graphe de $g(x) = \sin(\pi x)$, où $x \in X$.

On peut se représenter le graphe de f comme sur l'image. **Attention !** L'espace $X/\!\sim$ n'est pas un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, donc cette image est là pour aider à la compréhension, mais elle ne représente pas réellement la situation. (Note plus avancée : en faisant ce dessin, on a choisi une façon de plonger $X/\!\sim$ dans $\mathbb{R}^2$, mais en choisissant un autre plongement, on obtiendrait un dessin différent.)

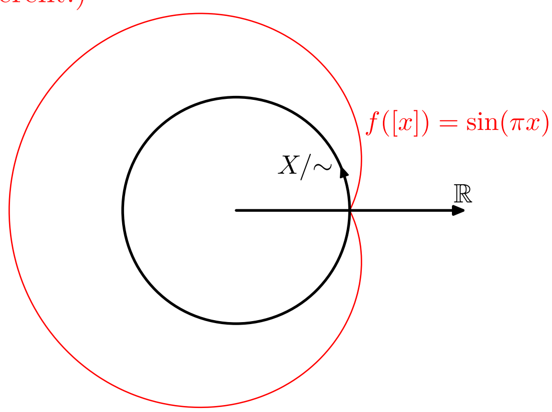
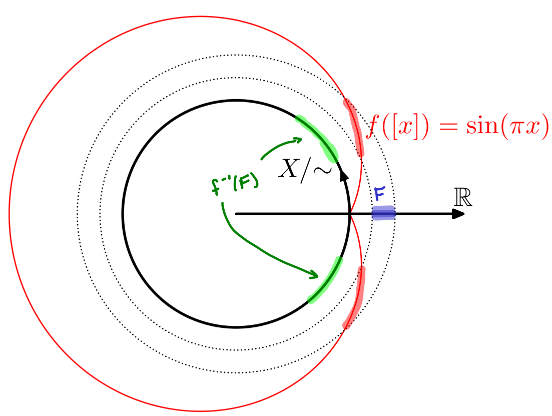


Figure. Représentation du graphe de f.

Il suffit de montrer que $f^{-1}(F)$ est fermé dans le cas où F est un intervalle fermé dans $\mathbb{R}$.

D'abord, si $F \cap [0,1] = \emptyset$, alors $f^{-1}(F) = \emptyset$, car $0 \leq \sin(\pi x) \leq 1$ pour $x \in [0,1]$.

Ensuite, si $F = [a,b] \subseteq (0,1]$, alors $\frac{\arcsin(a)}{\pi}$ et $\frac{\arcsin(b)}{\pi}$ se trouvent dans $(0,1)$ et $f^{-1}(F) = \left[\frac{\arcsin(a)}{\pi}, \frac{\arcsin(b)}{\pi}\right] \cup \left[\frac{1}{2} - \frac{\arcsin(b)}{\pi}, \frac{1}{2} - \frac{\arcsin(a)}{\pi}\right] \subseteq (0,1)$ est fermé dans $X/\!\sim$.



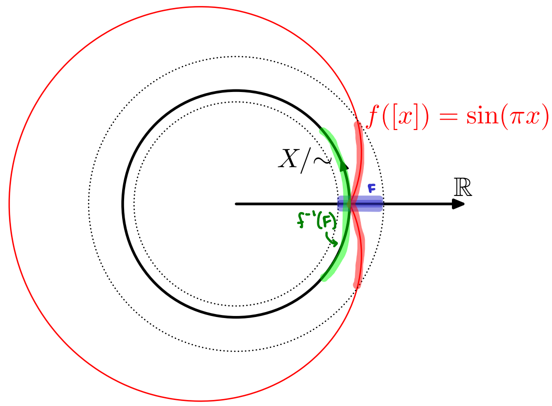
Enfin, si $0 \in F = [a,b]$, alors

$$f^{-1}(F) = \left\{[x] : x \leq \frac{\arcsin(b)}{\pi} \text{ ou } x \geq \frac{1}{2} - \frac{\arcsin(b)}{\pi}\right\}$$

Soit $p\colon X \to X/\!\sim; x \mapsto [x]$. Il suffit de voir que

$$\pi^{-1}(f^{-1}(F)) = \big[0, \frac{\arcsin(b)}{\pi}\big] \cup \big[\frac{1}{2} - \frac{\arcsin(b)}{\pi}, 1\big]$$

est fermé dans X, donc $f^{-1}(F)$ est fermé dans $X/\!\sim$.



Tout fermé de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme une union finie d'intervalles fermés, où chacun de ces intervalles tombe dans l'un des cas précédents. On conclut que f est continue.

3. Connexité

Exercice 22. Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la limite inférieure. Soit $-\infty < a < b < \infty$.

a) Montrer que $[a, b)$ n'est pas connexe.

b) Est-ce que (a, b) est connexe ?

Solution. a) On va montrer un peu plus : $[a, b)$ est ouvert et fermé quelque soit $-\infty < a < b$. En effet, $[a, b)$ est ouvert, par définition de la topologie de la limite inférieure. Son complément est $\mathbb{R} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$. Il est clair que $[b, \infty)$ est ouvert, puisque

$$[b, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [b, b + n).$$

Ensuite, $(-\infty, a)$ est ouvert puisque

$$(-\infty, a) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a - n, a - \tfrac{1}{n}).$$

Il suit que $\mathbb{R} \setminus [a, b)$ est ouvert, donc $[a, b)$ est fermé.

Pour répondre à la question, $[a, b)$ n'est pas connexe, puisque $[c, d)$, avec $a < c < d < b$ est un sous-ensemble ouvert et fermé dans $[a, b)$.

b) De la même façon, (a, b) n'est pas connexe, car $[c, d)$, avec $a < c < d < b$, est ouvert et fermé dans (a, b).

Exercice 23. Vrai ou faux. Soit (X, τ) un espace topologique. Si $Y \subseteq X$ n'est pas connexe, alors X n'est pas connexe.

Solution. Faux. $\mathbb{R}$ est connexe, mais $(0,1) \cup (2,3) \subseteq \mathbb{R}$ n'est pas connexe.

Exercice 24. Soit (Y, τ) muni de la topologie discrète et tel que $\mathrm{card}(Y) \geq 2$. Montrer que

$$X \text{ est connexe} \iff \text{chaque } f\colon X \to Y \text{ continue est constante.}$$

Remarque. Cette caractérisation de la connexité est surtout utile avec $Y = \{0, 1\}$.

Solution. La nécessité a été démontrée en classe.

Pour la suffisance, on montre la contraposée, c'est-à-dire qu'on suppose que X n'est pas connexe et on montre qu'il existe $f\colon X \to Y$ continue et non constante.

Comme $\mathrm{card}(Y) \geq 2$, il existe $a, b \in Y$ avec $a \neq 0$. Soit U, V une séparation de X. On définit

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{si } x \in U, \\ b, & \text{si } x \in V. \end{cases}$$

D'abord, on constate que f est bien définie sur X, puisque $U \cup V = X$, donc chaque x a une image, et $U \cap V = \emptyset$, donc chaque x a au plus une image.

Ensuite, vérifions que f est continue. Soit $E \subseteq Y$. Si $a \in E$, mais $b \notin E$, alors $f^{-1}(E) = U$. Si $b \in E$ et $a \notin E$, alors $f^{-1}(E) = V$. Si $a, b \notin E$, alors $f^{-1}(E) = \emptyset$ et, enfin, si $a, b \in E$, alors $f^{-1}(E) = X$. Dans tous les cas, $f^{-1}(E)$ est ouvert quelque soit E, donc en particulier si E est ouvert. On conclut que f est continue.

En dernier lieu, f est non constante puisque U et V sont non vides, donc $f(X) = \{a, b\}$.

Exercice 25. En utilisant le fait que l'image d'un connexe est connexe, montrer le théorème des valeurs intermédiaires. Autrement dit, montrer que si I est un intervalle et $f\colon I \to \mathbb{R}$ est continue, alors quelque soit $x, y \in I$ avec $x < y$ et $f(x) \neq f(y)$, pour tout z entre $f(x)$ et $f(y)$, il existe $x \leq a \leq y$ tel que $f(a) = z$.

Exercice 26. Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit que $C \subseteq V$ est *convexe* si pour tout $x, y \in C$, on a que $[x, y] \subseteq C$, où $[x, y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0, 1]\}$ est le segment de droite joignant x à y. Montrer que tout ensemble convexe est connexe.

Remarque. Un espace vectoriel normé est un espace métrique et donc topologique comme suit : on définit une métrique par $d(x, y) := \|x - y\|$.

Exercice 27. Montrer que $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{Q}$ est connexe si et seulement si E est un singleton.

Remarque. Un espace topologique (X, τ) qui est tel que les seuls sous-espaces connexes sont les singletons (et l'ensemble vide) est dit *totalement disconnexe*. Ainsi, $\mathbb{Q}$ avec la topologie standard est un exemple d'espace totalement disconnexe.

Solution. $\Rightarrow$) Procédons par contraposée. Supposons que E est n'est pas un singleton et montrons que E n'est pas connexe. Soit $x, y \in E$ avec, sans perte de généralité, $x < y$. (Ils existent puisque E est non vide.) Par densité des irrationnels dans les rationnels, il existe $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x < r < q$. Alors $(-\infty, r) \cap \mathbb{Q}$ et $(r, \infty) \cap \mathbb{Q}$ est une séparation de E par des ouverts de $\mathbb{Q}$, d'où E n'est pas connexe.

$\Leftarrow$) Ce cas est trivial. Supposons que $E = \{x\}$ est un singleton. Par l'absurde, supposons que U, V est une séparation de E par des ouverts de E. Puisique $E = U \cup V$, on a $x \in U$ ou $x \in V$. SPDG, supposons que $x \in U$. Comme $U \cap V = \emptyset$, il suit que $x \notin V$. Comme $V \subseteq E$ et que $x \notin V$, il suit que $V = \emptyset$, ce qui est une contradiction. D'où E est connexe.

Exercice 28. Soit (X, τ) et (Y, τ') deux espaces topologiques et $f\colon X \to Y$ une fonction continue.

a) Montrer que si X est connexe par arcs, alors $f(X)$ est connexe par arcs.

b) Déduire que la connexité par arcs est une propriété topologique.

Solution. a) Soit $u, v \in f(X)$. Il existe $x, y \in X$ tels que $u = f(x)$ et $y = f(v)$. Comme X est connexe par arcs, il existe $\gamma\colon [0,1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Alors $f \circ \gamma\colon [0,1] \to Y$ est continue et vérifie $f \circ \gamma(0) = f(x) = u$ et $f \circ \gamma(1) = f(y) = v$, c'est donc un arc dans $f(X)$ entre u et v, d'où X est connexe par arcs.

b) Soit f est un homéomorphisme, alors f est surjective, donc $f(X) = Y$ et par le a), $f(X)$ est connexe par arcs, donc Y est connexe par arcs.

Exercice 29. a) Déterminer si $A := \partial B\big((0,0,0), 1\big) \cup \partial B\big((0,0,0), 2\big)$ est connexe ou non.

b) Déterminer si $B := \partial B\big((0,0,0), 1\big) \cup \partial B\big((0,0,0), 2\big) \cup \{(0,0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est connexe ou non.

Solution. a) Non. En effet, on peut prendre la séparation $U = B\big((0,0,0), 3/2\big)$ et $V = \overline{B}\big((0,0,0), 3/2\big)^c = \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| > 3/2\}$. (Je vous laisse vérifier que c'est une séparation de A.)

b) Oui. On voit que B est formé de trois « morceaux » qui s'intersectent. On pose donc $B_1 := \partial B\big((0,0,0), 1\big)$, $B_2 := \partial B\big((0,0,0), 2\big)$ et $B_3 := \{(0,0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

D'abord, montrons que les B_i sont connexes par arcs. L'ensemble B_1 est la sphère unité, elle donc l'image des coordonnées sphériques $F\colon [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$ données par

$$F(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Comme le rectangle est connexe par arcs (il est convexe, donc on peut faire appel à un numéro précédent) et que F est surjective, il suit que B_1 est connexe par arcs. Le même argument fonctionne pour B_2. Pour l'ensemble B_3, il suffit de voir que c'est l'image de la fonction continue $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$; $t \mapsto (0,0,t)$.

Montrons maintenant que B est connexe par arcs. Soit $v \neq w \in B$. Si $v, w \in B_i$, on sait déjà qu'il y a un arc entre v, w. Il reste trois cas à considérer ; 1) $v \in B_1$ et $w \in B_2$, 2) $v \in B_1$ et $w \in B_3$ et 3) $v \in B_2$ et $w \in B_3$.

1) Il y a un arc γ_1 entre v et $(0,0,1)$ dans B_1, un arc γ_2 entre $(0,0,1)$ et $(0,0,2)$ dans B_3 et un arc γ_3 entre $(0,0,2)$ et w dans B_2. On définit

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(3t), & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right), \\ \gamma_2(3t-1), & \text{si } t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \\ \gamma_3(3t-2), & \text{si } t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

(C'est la concaténation de γ_1, γ_2 et γ_3.) C'est un arc dans B entre v et w.

Les cas 2) et 3) se font de la même façon.

Exercice 30. (Composantes connexes par arcs). Soit (X, τ) un espace topologiqe non vide.

a) Soit $x, y, z \in X$. Supposons que $\gamma_1\colon [0,1] \to X$ est un arc continu entre x et y et que $\gamma_2\colon [0,1] \to X$ est un arc continu entre y et z. On définit la *concaténation* de γ_1 et γ_2 par

$$\gamma_1 \# \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t-1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Montrer que $\gamma_1 \# \gamma_2$ est bien un arc $[0,1] \to X$ continu de x à z.
Suggestion. Commencer par faire le travail avec l'arc

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{si } t \in [0,1), \\ \tilde{\gamma}_2(t), & \text{si } t \in [1,2]. \end{cases}$$

où $\tilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2(t-1)$.

b) On définit la relation $\sim$ sur X par $x \sim y$ ssi il existe un arc entre x et y. Montrer que $\sim$ est une relatin d'équivalence.
On appelle les classe d'équivalence de $X/\sim$ les *composantes connexes par arcs*

c) Montrer que X est connexe par arcs si et seulement si X n'a qu'une seule composante connexe par arcs, c'est-à-dire ssi $X/\sim$ n'a qu'une seule classe d'équivalence.

Solution. a) Soit $A_1 := \gamma_1([0,1])$ et $A_2 := \tilde{\gamma}_2([1,2])$, l'image de γ_1 et γ_2 respectivement. On sait que $\gamma_1(1) = \tilde{\gamma}_2(1) = y \in A_1 \cap A_2$. On peut montrer que si $F \subseteq X$, alors

$$\tilde{\gamma}^{-1}(F) = \gamma_1^{-1}(F) \cup \tilde{\gamma}_2^{-1}(F).$$

Si F est fermé, alors chaque partie de l'union à droite de l'égalité est fermée, donc l'union est fermée. Il suit que $\tilde{\gamma}$ est continue. Ensuite, il suffit d'écrire $\gamma_1 \# \gamma_2(t) = \tilde{\gamma}(2t)$, qui est encore continue.

b) Réflexif : $\gamma(t) = x$ pour tout $t \in [0,1]$ est un arc de x à x.

Symétrique : $x \sim y \Rightarrow \gamma\colon [0,1] \to X$ avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Il suffit de prendre $\alpha(t) := \gamma(-t)$.

Transitif : $x \sim y$ et $y \sim z$ implique qu'il existe γ_1, γ_2 avec $\gamma_1(0) = x$, $\gamma_1(1) = y$, $\gamma_2(0) = y$ et $\gamma_2(1) = z$. Il suffit de prendre $\gamma_1 \# \gamma_2$ comme arc entre x et z.

c) X n'a qu'une seule classe d'équivalence ssi x, y sont dans la même classe d'équivalence quelque que soit x, y ssi il y a un arc entre x et y quelque soit x, y ssi X est connexe par arcs.

Exercice 31. Soit (X, τ) un espace topologique et $A, B \subseteq X$ des sous-espaces non vides.

a) Montrer que si A et B sont connexes par arcs et si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est connexe par arcs.

b) Montrer que si A et B sont connexes et si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est connexe.

c) Généraliser le a) et le b) comme suit : $A_i \subseteq X$ $(i \in I)$ connexes (resp. connexes par arcs), si $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe (resp. connexe par arcs).

Solution. b) Par l'absurde, supposons que U, V est une séparation de $A \cup B$ avec des ouverts de $A \cup B$.

Puisque $U \cap B = \emptyset$ et que A est connexe, on a soit $A \subseteq U$ ou $A \subseteq V$. Sans perte de généralité, supposons que $A \subseteq U$. (Dans ce cas, on a $A \cap V = \emptyset$.) De la même façon, on a soit $B \subseteq U$ ou $B \subseteq V$. Si $B \subseteq U$, alors $V = \emptyset$, ce qui est une contradiction. On a donc $B \subseteq V$. Or, on a également $A \cap B \subseteq A \subseteq U$ et $A \cap B \subseteq B \subseteq V$, ce qui est impossible, puisque $U \cap V = \emptyset$. D'où aucune séparation de $A \cup B$ n'existe et $A \cup B$ est connexe.

Exercice 32. (Composantes connexes). Soit (X, τ) un espace topologiqe non vide.

a) Soit $\sim$ la relation sur X définie par $x \sim y$ si et seulement s'il existe $C \subseteq X$ connexe tel que $x, y \in C$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
On appelle les classes d'équivalence de $X/\sim$ les *composantes connexes* de X.

b) Montrer que pour tout $x \in X$, la classe d'équivalence $[x]$ est connexe. (Remarque : $[x] \subseteq X$ et est muni de la topologie relative.)

c) Montrer que pour $x \in X$, $[x]$ est le plus grand connexe de X qui contient x. Autrement dit, montrer que si $C \subseteq X$ est connexe et $x \in C$, alors $C \subseteq [x]$.

d) Montrer que X est connexe si et seulement si X n'a qu'une seule composante connexe.

e) Montrer que le nombre de composantes connexes est une propriété topologique.

Solution. a) Réflexif : $x \in \{x\}$ et x est connexe, donc $x \sim x$. Symétrique : évident. Transitif : Soit $x, y, z \in X$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$. Il existe donc C_1 et C_2 connexes tels que $x, y \in C_1$ et $y, z \in C_2$. Alors comme $y \in C_1 \cap C_2$, il suit que $C_1 \cup C_2$ est connexe par un numéro précédent. On a de plus $x, z \in C_1 \cup C_2$, donc $x \sim z$.

b) Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe une séparation U, V de $[x]$ par des ouverts de $[x]$. Soit $y \in U$ et $z \in V$. Puisque $y, z \in [x]$, on a que $y \sim z$, donc il existe C connexe tel que $y, z \in C$. Or, $U \cap C$ et $V \cap C$ sont non vides et forment une séparation de C, ce qui est une contradiction. D'où $[x]$ est connexe.

c) Soit $C \subseteq X$ un connexe tel que $x \in C$. Tout $y \in C$ est tel que $x \sim y$, donc $y \in [x]$. Ceci montre que $C \subseteq [x]$.

d) $\Rightarrow$) Supposons que X est connexe. Quelque soit $x \in X$, comme X est connexe, par le c), on a que $X \subseteq [x]$, donc $[x] = X$. Il suit que $X/\!\sim\, = \{X\}$, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'une seule classe d'équivalence.

$\Leftarrow$) Comme les classes d'équivalence forme une partition de X et que $X/\!\sim$ n'a qu'une seule classe d'équilance, il suit que cette classe d'équilance est X. Comme la classe d'équivalence est connexe, on déduit que X est connexe.

e) Soit (X, τ) et (Y, τ') des espaces topologiques et $f\colon X \to Y$ un homéomorphisme. Il suffit de montrer que f induit une bijection de $X/\!\sim\, \to Y/\!\sim$ par $f([x]) = [f(x)]$.

Montrons d'abord $x \sim y$ ssi $f(x) \sim f(y)$. On a que $x, y \in C$ ssi $f(x), f(y) \in f(C)$, puisque f est bijective. Puisque f est un homéomorphisme, C est connexe ssi $f(C)$ est connexe. Il suit que $x \sim y$ ssi $f(x) \sim f(y)$. On en déduit que $f([x]) = [f(x)]$.

Exercice 33. Soit (X, τ) et (Y, τ') des espaces topologiques connexes. Montrer que $X \times Y$ est connexe (sous la topologie produit).

Solution. Soit $(x, y) \in X \times Y$. La droite $X \times \{y\}$ est connexe, puisqu'elle est homéomorphe à X. De même, $\{x\} \times Y$ est connexe. Puisque ces deux droites s'intersectent en (x, y) leur union est connexe. Soit $(a, b) \in X \times Y$ un point fixé. On peut écrire

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} \big(X \times \{b\} \cup \{x\} \times Y\big).$$

Chaque membre de l'union est connexe et ils ont (a, b) comme point d'intersection commun, donc l'union est connexe par un exercice précédent.

Voici une preuve différente et, en quelque sorte, moins élégante.

Supposons le contraire. Alors il existe une séparation U, V de $X \times Y$ par des ouverts de $X \times Y$. La topologie produit a pour base $\mathcal{B} = \{U_i \times V_i \mid U_i \in \tau, V_i \in \tau'\}$, donc il suit que

$$U = \bigcup_{i \in I} A_i \times B_i \quad \text{et} \quad V = \bigcup_{j \in J} C_j \times D_j,$$

où A_i, C_j sont des ouverts de X et B_i, D_j sont des ouverts de Y.

On considère $p_X\colon X \times Y \to X$ et $p_Y\colon X \times Y \to Y$ les projections, donc $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ respectivement. On pose

$$U_X := p_X(U) = p_X\left(\bigcup_{i \in I} A_i \times B_i\right) = \bigcup_{i \in I} p_X(A_i \times B_i) = \bigcup_{i \in I} A_i,$$

qui est une union d'ouverts de X. On pose aussi $V_X := p_X(V)$, $U_Y := p_Y(U)$ et $V_Y := p_Y(V)$, qui sont des ouverts par le même raisonnement.

Supposons maintenant qu'il existe $x \in U_X \cap V_X$ et $y \in U_Y \cap V_Y$. Dans cas, il existe $i_0 \in I$ et $j_0 \in J$ tels que $x \in A_{i_0}$ et $y \in B_{j_0}$, donc $(x, y) \in A_{i_0} \times B_{i_0} \subseteq U$. De façon similaire, il existe $i_1 \in I$ et $j_1 \in J$ tels que $x \in C_{i_1}$ et $y \in D_{j_1}$, donc $(x, y) \in C_{i_1} \times D_{j_1} \subseteq V$. Il suit que $(x, y) \in U \cap V$, ce qui est une contradiction.

On peut donc supposer, sans perte de généralité, que $U_X \cap V_X = \emptyset$. Dans ce cas, puisque $U_X \cup V_X = X$ et que U_X, V_X sont des ouverts non vides de X, on a une séparation de X, ce qui contredit la connexité de X.

Conclusion : $X \times Y$ est connexe.

4. Compacité

Exercice 34. Soit (X, τ) un espace topologique compact et discret. Montrer que X est fini.

Exercice 35. Soit D le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$ et soit $\dot{D} = D \setminus \{(0, 0)\}$. Par le théorème de Heine-Borel, D est compact. Si $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de D, alors on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Puisque $\dot{D} \subseteq D$, ce sous-recouvrement recouvre $\dot{D}$. Donc $\dot{D}$ est compact.
Où est l'erreur dans ce raisonnement ?

Solution. L'erreur est qu'il y a des recouvrements ouverts de $\dot{D}$ qui ne sont pas pris en compte, car tous les recouvrements ouverts de $\dot{D}$ ne sont pas nécessairement des recouvrements ouverts de D. En effet, on a

$$\dot{D} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \dot{D} \setminus \overline{B}\big((0, 0), \tfrac{1}{n}\big),$$

donc c'est un recouvrement ouvert de $\dot{D}$, mais ce n'est pas un recouvrement ouvert de D. De plus, on voit que ce recouvrement ne possède pas de sous-recouvrement fini.

Exercice 36. Soit (X, τ) un espace topologique compact. Soit $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ des fermés de X. Montrer que si $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F_n = \emptyset$ pour tout $n \geq N$.

Solution. Comme $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$, il suit que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n^c$, donc c'est un recouvrement ouvert de X. Puisque que X est compact, il existe $F_{i_1}^c, \ldots, F_{i_m}^c$ tels que $X = F_{i_1}^c \cup \cdots \cup F_{i_m}^c$. Il suit que $\emptyset = F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_m}$. Comme $F_n \supseteq F_{n+1}$, on doit avoir que $F_{i_m} = \emptyset$. L'énoncé est donc vérifié avec $N := i_m$.

Exercice 37. Soit X un ensemble et τ, τ' deux topologies sur X. Montrer que si (X, τ) est compact et si τ' est plus grossière que τ, alors (X, τ') est compact.

Solution. Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X par des ouverts de τ'. Comme $\tau' \subseteq \tau$, c'est également un recouvrement ouvert par des ouverts de τ, donc il existe un SRF.

Exercice 38. Soit (X, τ) un espace topologique séparé. Soit $K_n \subseteq X$ des compacts.

a) Montrer que $\bigcup_{n=1}^{N} K_n$ est compact si $N < \infty$.

b) Est-ce que $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ est compact en général ?

c) Montrer que $\bigcap_{n=1}^{N} K_n$ est compact si $N < \infty$.

d) Est-ce que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ est compact en général ?

Solution. a) Si $\{U_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de $\bigcup_{n=1}^{N} K_n$, alors c'est un recouvrement ouvert de K_k pour chaque k. Ainsi, pour chaque k, il y a un sous-recouvrement $U_{i_{1,k}}, \ldots U_{i_{j_k,k}}$. Il suit que $\{U_{i_{\ell,k}}\}$ est un sous-recouvrement ouvert fini de $\bigcup_{n=1}^{N} K_k$.

b) Non, par exemple $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n, n] = \mathbb{R}$ qui n'est pas compact.

c) et d) Oui. On a que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ est contenu dans K_1 et est fermé, donc c'est un compact.

Exercice 39. Soit (X, τ) un espace topologique de Hausdorff et $A, B \subseteq X$ des compacts disjoints. Montrer qu'il existe des ouverts disjoints U, V de X tels que $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.

Exercice 40. La sphère unité $S = \partial B(\vec{0}, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$ est-elle homéomorphe au plan $\mathbb{R}^2$?

Solution. Impossible, car S est compact (fermé et borné dans $\mathbb{R}^3$), mais $\mathbb{R}^2$ n'est pas compact ($\{B(\vec{0}, n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de SRF).

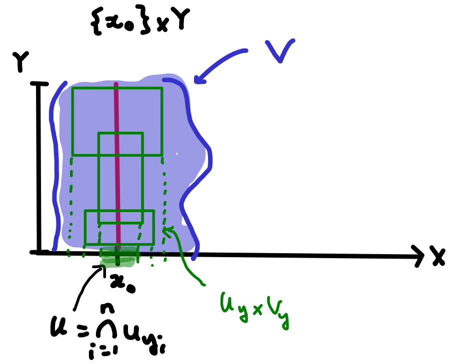
Exercice 41. Soit (X, τ) un espace topologique et (Y, τ') un espace topologique compact. Soit $x_0 \in X$. Montrer que si V est un ouvert de $X \times Y$ tel que $\{x_0\} \times Y \subseteq V$, alors il existe U voisinage ouvert de x_0 dans X tel que $U \times Y \subseteq V$.

Remarque. On appelle parfois le voisinage ouvert $U \times Y$ un *tube*. Ce résultat est faux en général si Y n'est pas compact.

Solution. Soit $(x_0, y) \in \{x_0\} \times Y$. Puisque V est ouvert dans $X \times Y$, il existe des ouverts U_y de X, V_y de Y tels que $(x_0, y) \in U_y \times V_y \subseteq V$. La famille $\{V_y\}_{y\in Y}$ est un recouvrement ouvert de Y, donc il existe un sous-recouvrement fini, disons $\{V_{y_i}\}_{i=1}^n$. On pose

$$U := \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}.$$

C'est un ouvert de X.



Montrons maintenant que $U \times Y \subseteq V$. Soit $(x, y) \in U \times Y$. Alors $x \in U_y$, donc $(x, y) \in U_y \times V_y \subseteq V$, ce qui montre que $U \times Y \subseteq V$.

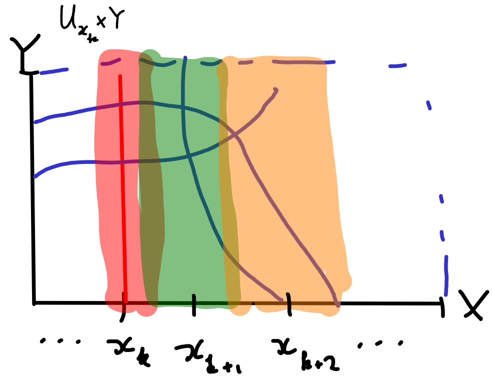
Exercice 42. Soit (X, τ) et (Y, τ') des espaces topologiques compacts. Montrer que $X \times Y$ est compact.
Indice. Soit $\{V_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $X \times Y$. Utiliser d'abord la compacité de Y sur $\{x\} \times Y$ et l'exercice précédent. Utiliser ensuite la compacité de X.

Remarque. Si (X_i, τ_i) sont des espaces topologiques compacts, il est vrai que le produit cartésien $\prod_{i \in I} X_i$ est compact lorsque le produit est muni de la topologie *produit*. C'est le théorème de Tychonoff, qui est bien plus difficile que le cas d'un produit fini.

Solution. On fixe $x \in X$. Par hypothèse, $\{V_i\}$ est un recouvrement ouvert de $\{x\} \times Y$. Comme $\{x\} \times Y$ est homéomorphe à Y, il est compact, donc il existe un sous-recouvrement fini $\{V_{i_j^x}\}_{j=1}^{n_x}$.

On pose $V_x = V_{i_1^x} \cup \cdots \cup V_{i_{n_x}^x}$. C'est un ouvert de $X \times Y$ tel que $\{x\} \times Y \subseteq V_x$. Par l'exercice précédent, il existe $U_x \subseteq X$ ouvert dans X tel que $U_x \times Y \subseteq V_x$.

On obtient de cette façon un recouvrement ouvert $\{U_x\}_{x \in X}$ de X. Puisque X est compact, il existe un sous-recouvrement fini, disons $\{U_{x_k}\}_{k=1}^m$.



Comme on a $U_{x_k} \times Y \subseteq V_{x_k}$, il suit que $X \times Y \subseteq V_{x_1} \cup \cdots V_{x_m}$, donc

$$\bigcup_{k=1}^{m} \{V_{i_j}^{x_k}\}_{j=1}^{n_{x_k}}$$

est un sous-recouvrement fini de $X \times Y$.

Exercice 43. (Optionnel, pour ceux/celles qui ont fait un cours d'algèbre de groupes). Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On dit que G est un *groupe topologique* si G est muni d'une topologie τ telle que $\cdot : G \times G \to G$ et $^{-1} : G \to G$ (l'inversion) sont continues.

Remarque. Certain·e·s auteur·trices demandent aussi que G soit T_1, auquel cas on peut montrer que G est alors T_2. Pour b) à d), on suppose que G est T_1.

a) Montrer que G est un groupe topologique si et seulement si

   i) si W est un voisinage de xy, alors il existe U et V, un voisinage de x et y respectivement, tels que $UV \subseteq W$, où $UV := \{ab \mid a \in U, b \in V\}$, et

   ii) quelque soit $x \in G$ et pour tout voisinage ouvert V de x^{-1}, il existe un ouvert U tel que $x \in U$ et $U^{-1} \subseteq V$, où $U^{-1} := \{a^{-1} \mid a \in U\}$.

b) Soit A, B des sous-espaces de G. Montrer que si A est fermé dans G et si B est compact, alors AB est fermé dans G.
   Indice. Si $c \in (AB)^c$, trouver un voisinage ouvert W de c tel que WB^{-1} et A sont disjoints.

c) Soit H un sous-groupe normal de G. Soit $p : G \to G/H$ l'application quotient. Montrer que si H est compact, alors p est fermée.

d) Soit H un sous-groupe normal compact de G. Montrer que si G/H est compact, alors G est compact.

5. Propriétés locales

Exercice 44. Soit (X, τ) un espace topologique. Montrer que si pour tout U ouvert dans X, les composantes connexes de U sont ouvertes dans X, alors X est localement connexe.

Solution. Soit $x \in X$ et U un voisinage ouvert de x. Soit $C \subseteq U$ la composante connexe de x dans U. Par hypothèse, C est ouvert dans X et $x \in C$, donc X est localement connexe.

Exercice 45. Soit (X, τ) un espace topologique. Montrer que X est localement connexe par arcs si et seulement si pour tout U ouvert dans X, les composantes connexes par arcs de U sont ouvertes dans X.

Exercice 46. Soit (X, τ) un espace topologique et soit $U \subseteq X$ un ouvert de X. Montrer que si X est connexe et localement connexe par arcs, alors X est connexe par arcs.

Solution. Soit C_i $(i \in I)$ les composantes connexes par arcs de U. Par l'exercice précédent, elles sont ouvertes, puisque U est localement connexe par arcs. Soit $i_0 \in I$ quelconque. On peut écrire

$$U \setminus C_{i_0} = \bigcup_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} C_i.$$

C'est une union d'ouverts de U, donc C_{i_0} est fermé dans U. Puisque U est connexe, on a $C_{i_0} = \emptyset$ ou $C_{i_0} = U$. Comme i_0 est quelconque, on conclut qu'il y a une seule composante connexe par arcs, donc U est connexe par arcs.

Exercice 47†. Le but de l'exercice est de montrer que connexe $\not\Rightarrow$ localement connexe.

Soit $X = \big\{\big(x, \sin\frac{1}{x}\big) \mid x \in (0, 1]\big\}$.

a) Montrer que X est connexe.

b)† On tient pour acquis que $\overline{X}$ est connexe (ou peut faire appel à l'exercice 52b). Montrer que $\overline{X} = X \cup \big(\{0\} \times [-1, 1]\big)$.

c) On pose $z := (0, 0) \in \overline{X}$. Montrer que pour tout voisinage ouvert $V \subseteq B(z, 1/2)$ de z dans $\overline{X}$ n'est pas connexe.

d) Déduire que $\overline{X}$ n'est pas localement connexe.

Solution. a) La fonction $f \colon (0, 1] \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = (x, \sin\frac{1}{x})$ est continue, puisque chaque composante est continue*. Comme $(0, 1]$ est connexe, son image l'est également. De plus, il est clair que $X = f\big((0, 1]\big)$.

En analyse, on montre qu'une fonction de $X \to \mathbb{R}^n$ est continue si et seulement si chacune des composantes est continue. Vous pouvez montrer la même chose lorsque le codomaine est muni de la topologie produit.

b) La façon la plus simple de le démontrer est avec les suites. Si vous n'avez pas fait analyse 3, ne vous cassez pas la tête avec ce sous-numéro.

Soit (x_n, y_n) une suite converge de X. S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x_n \in [\varepsilon, 1]$, alors (x_n, y_n) converge dans $f([\varepsilon, 1]) \subseteq X$, puisque $f([\varepsilon, 1])$ est compact et donc fermé. Sinon, il faut que $x_n \to 0$ (car on suppose que (x_n) est convergente). Dans ce cas, $(x_n, y_n) \to (0, y)$, où $-1 \leq y \leq 1$, ce qui montre que $\overline{X} \subseteq X \cup (\{0\} \times [-1, 1])$.

Pour montrer l'inclusion dans l'autre sens, on considère $y \in [-1,1]$ et on veut montrer qu'il existe une suite de X qui converge vers $(0,y)$. Soit $t = \arcsin y$. Alors $(x_n, y_n) := (\frac{1}{t+2\pi n}, \sin(t+2i\pi n))$ est une suite de X, dès que $n \in \mathbb{N}$ est assez grand, et elle converge vers $(0,y)$.

c) Soit V un ouvert tel que décrit dans l'énoncé. Puisque V est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(z,r) \subseteq V$ dans $\overline{X}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N} < r$. On a alors que $\left(\frac{1}{2\pi N}, 0\right) \in B(z,r) \subseteq V$ dans X. (En effet, on a bien $\left(\frac{1}{2\pi N}, 0\right) \in X$, c'est important.)

On pose $x_0 = \frac{1}{2\pi N + \frac{\pi}{2}}$. On considère la droite verticale

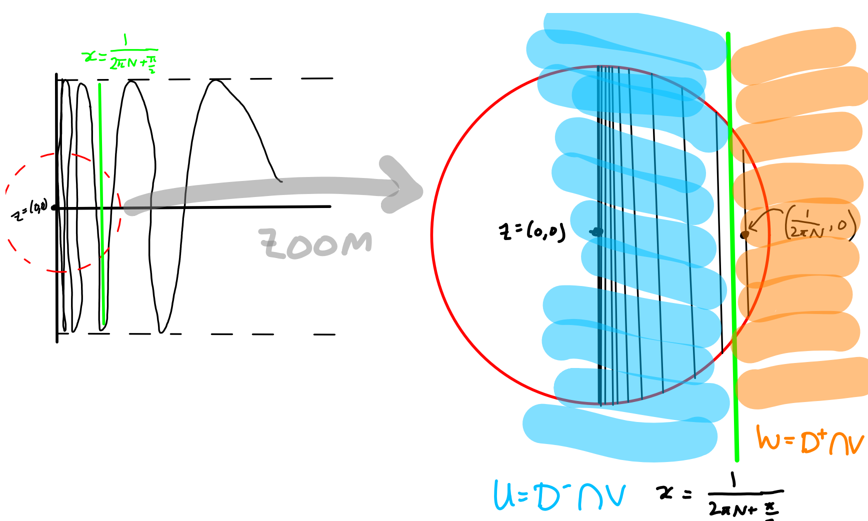
$$D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x = x_0 = \frac{1}{2\pi N + \frac{\pi}{2}} \text{ et } y \in \mathbb{R} \right\},$$

qui divise $\mathbb{R}^2$ en deux demi-plans

$$D^+ = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x > x_0 = \frac{1}{2\pi N + \frac{\pi}{2}} \text{ et } y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$D^- = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x < x_0 = \frac{1}{2\pi N + \frac{\pi}{2}} \text{ et } y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Voir la figure ci-bas. La droite D intersecte $\overline{X}$ en un seul point : en $\left(x_0, \sin\frac{1}{x_0}\right) = (x_0, 1)$, et c'est le seul point d'intersection, car X est le graphe d'une fonction et intersecte donc les droites verticales une seule fois. Ce point d'intersection n'est pas dans V, car $d_2\big((x,1),(0,0)\big) > \frac{1}{2}$, donc on pose $U := V \cap D^-$ et $W := V \cap D^+$.



Montrons que U, W forme une séparation de V.

- U et W sont ouverts dans V, car ils sont l'intersection d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ ($D^\pm$) avec V.
- On a $U \cap W = \emptyset$, car $D^+ \cap D^- = \emptyset$.

- On a $U \cup W = V$, car $V \cap D = \emptyset$ et $D^+ \cup D \cup D^- = \mathbb{R}^2$, donc $V \subseteq D^- \cup D^+$.
- On a que $U \neq \emptyset$, car $z = (0,0) \in V$ et $z \in D^-$, donc $z \in U$.
- On a que $W \neq \emptyset$, car $\left(\frac{1}{2\pi N}, 0\right) \in D^+$ (puisque $\frac{1}{2\pi N} > \frac{1}{2\pi N + \frac{\pi}{2}}$) et $\left(\frac{1}{2\pi N}, 0\right) \in B(z,r) \subseteq V$ dans $\overline{X}$ comme mentionné plus haut, donc $\left(\frac{1}{2\pi N}, 0\right) \in W$.

d) Si $\overline{X}$ était localement connexe, alors il existerait une voisinage ouvert connexe V de z dans $\overline{X}$ de $B\left(z, \frac{1}{2}\right)$, mais on a montré au b) que ce n'est pas le cas.

Exercice 48[†]**.** Le but de l'exercice est de montrer que connexe par arcs $\not\Rightarrow$ localement connexe par arcs.

On pose $D_n = \left\{\frac{1}{n}\right\} \times [0,1]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $D_0 = \{0\} \times [0,1]$ et

$$X := [0,1] \times \{0\} \cup D_0 \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n \right).$$

a) Montrer que X est connexe par arcs.

b) On pose $z := (0,1) \in X$. Montrer que tout voisinage ouvert $V \subseteq B(z, 1/2)$ de z n'est pas connexe par arcs.

c) Déduire que X n'est pas localement connexe par arcs.

Solution. a) D_n est connexe par arcs et $[0,1] \times \{0\}$ aussi. Comme pour chaque $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, D_n et $[0,1] \times \{0\}$ s'intersectent en $(\frac{1}{n}, 0)$ ou $(0,0)$ lorsque $n = 0$, il suit que $([0,1] \times \{0\}) \cup D_0$ est connexe par arcs (par un exercice précédent), que $([0,1] \times \{0\}) \cup D_0 \cup D_1$ est connexe par arcs et ainsi de suite pour obtenir X.

b) Commençons par un résultat préliminaire. Si $x \in D_0$ et $y \in D_n$, avec $n \neq 0$, alors quelque soit le chemin α entre x et y, il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $\alpha(t_0) \in [0,1] \times \{0\}$.

On peut écrire $\alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $x = (0, x_1)$ et $y = (y_0, y_1)$ en coordonnées. Vu que $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y$, il suit que $x(0) = 0$ et $x(1) = y_0 = \frac{1}{m}$. De plus, notons que $y(t) > 0$ $\Rightarrow \alpha(t) \in D_j \Rightarrow [x(t) = \frac{1}{j}$ ou $x(t) = 0]$. Or, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $0 < x(t_0) = \frac{\sqrt{2}}{2n} < \frac{1}{n}$. (N'importe quel nombre irrationnel entre 0 et $\frac{1}{n}$ fait l'affaire.). Pour ce t_0, on doit avoir $y(t_0) = 0$, d'où $\alpha(t_0) \in [0,1] \times \{0\}$.

Soit maintenant $z := (0,1) \in X$ et $V \subseteq B(z, 1/2)$ un voisinage ouvert de z dans X. Puisque V est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(z,r) \subseteq V$ dans X. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N} < r$. Alors $(\frac{1}{N}, 1) \in B(z,r) \subseteq V$. Si α est un arc de z à $(\frac{1}{N}, 1)$, alors il existe t_0 tel que $\alpha(t_0) \in [0,1] \times \{0\}$. Mais il est impossible que $\alpha(t_0) \in V$, car $d_2\big(z, \alpha(t_0)\big) > \frac{1}{2}$. Il suit qu'il n'y aucun arc de z à $(\frac{1}{N}, 1)$ dans V, d'où V n'est pas connexe par arcs.

c) Si X était localement connexe par arcs, il existerait un voisinage V de z dans $B\left(z, \frac{1}{2}\right)$ qui serait connexe par arcs. On a montré au b) que ce n'est pas le cas.

Exercice 49. Soit (X, τ) un espace topologique séparé. Montrer que X est localement compact si et seulement si pour tout $x \in X$, il existe un compact $K \subseteq X$ qui contient un voisinage ouvert U de x.

Exercice 50. Identifier la compactification en un point des espaces suivants. (Il est suffisant de décrire un espace homéomorphe au compactifié. P.ex. S^1 dans le cas $\mathbb{R}$.)

a) $X = [a, b)$, où $-\infty < a < b < \infty$.

b) $X = (a, b)$, où $-\infty < a < b < \infty$.

c) $X = (0, 1) \cup (1, 2)$.

Solution. a) Le compactifié est $[a, b]$. En effet, $[a, b]$ est compact et $[a, b] \setminus X$ est un singleton.

b) Le compactifié est homéomorphe à S^1. En effet, soit X est homéomorphe à $S^1 \setminus \{(1, 0)\}$ par l'application

$$f(x) = \begin{pmatrix} \cos\big(2\pi \frac{x-a}{b-a}\big) \\ \sin\big(2\pi \frac{x-a}{b-a}\big) \end{pmatrix}.$$

Ensuite, si on ajoute un point à X, disons ∞, on peut prolonger f est une bijection $\tilde{f}\colon X \cup \{\infty\} \to S^1$ par $\tilde{f}(\infty) := (1, 0)$. La topologie initiale sur $X \cup \{\infty\}$ par $\tilde{f}$ en fait un espace compact qui contient X comme sous-espace.

(Peut-être que certaine personne sentiront le besoin de justifier davantage la dernière phrase. D'abord, il est clair que $X \cup \{\infty\}$ est compact, puisque $\tilde{f}^{-1}(S^1) = X \cup \{\infty\}$, S^1 est compact et $\tilde{f}^{-1}$ est continue. Ensuite, les ouverts de X sont exactement ceux de la forme $U \cap X$ pour un ouvert U de $X \cup \{\infty\}$. En effet, un tel ouvert est un ouvert de $S^1 \setminus \{(1, 0)\}$ et comme $S^1 \setminus \{(1, 0)\}$ et X sont homéomorphes, leurs ouverts sont en correspondance.)

c) Le compactifié de X est homéomorphe à $Y := \partial B\big((-1, 0), 1\big) \cup \partial B\big((1, 0), 1\big)$, c'est-à-dire deux cercles tangents en un point.

Montrons que X et $Y \setminus \{(0, 0)\}$ sont homéomorphes. On définit $f\colon (0, 1) \to \partial B\big((-1, 0), 1\big)$ et $g\colon (1, 2)\colon \partial B\big((1, 0), 1\big)$ par

$$f(x) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi x) - 1 \\ \sin(2\pi x) \end{pmatrix} \qquad g(x) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi x) + 1 \\ \sin(2\pi x) \end{pmatrix}.$$

On obtient un homéomorphisme en posant

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in \partial B\big((-1, 0), 1\big), \\ g(x), & \text{si } x \in \partial B\big((1, 0), 1\big). \end{cases}$$

On conclut que le compactifié de X est homéomorphe à Y de la même manière qu'au b).

6. Exercices supplémentaires

Exercice 51. Démontrer le lemme du recollement : Soit (X,τ) un espace topologique et $A,B \subseteq X$ des fermés de X tels que $X = A \cup B$. Soit (Y,τ') un espace topologique et $f\colon A \to Y$, $g\colon B \to Y$ des fonctions continues. Montrer que si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A \cap B$, alors

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A, \\ g(x), & \text{si } x \in B \end{cases}$$

est continue.

Exercice 52. Soit (X,τ) un espace topologique et $A,B \subseteq X$ des sous-espaces.

a) Montrer que si A est connexe et si $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, alors B est connexe.

b) Déduire que si A est connexe, alors $\overline{A}$ est connexe.

Solution. a) Supposons que U,V est une séparation de B par des ouverts de $\overline{A}$. Puisque A est connexe, on a que $A \subseteq U$ ou $A \subseteq V$. Disons que $A \subseteq U$. Il suit que $\overline{A} \subseteq \overline{U}$. Cela est une contradiction, puisque dans ce cas, $B \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{U}$, donc B serait disjoint de V.

b) Il suffit de prendre $B := \overline{A}$ dans l'énoncé du a).

Exercice 53. Soit (X,τ) un espace topologique et $E, F, E_1, E_2, \ldots \subseteq X$. Montrer que

a) $\overline{E^c} = (E^\circ)^c$

Solution. On a simplement

$$\overline{E^c} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ E^c \subseteq F}} F = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ F^c \subseteq E}} F = \bigcap_{\substack{U \text{ ouvert} \\ U \subseteq E}} U^c = \Bigg(\bigcup_{\substack{U \text{ ouvert} \\ U \subseteq E}} U \Bigg)^c = (E^\circ)^c.$$

b) E est ouvert $\Leftrightarrow E^\circ = E \Leftrightarrow \partial E \cap E = \emptyset$

Solution. Si E est ouvert, alors E est un élément de $\mathcal{U} = \{U \mid U \text{ est ouvert et } U \subseteq E\}$, donc

$$E^\circ = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = E.$$

Si $E = E^\circ$, alors E est ouvert puisque E° est ouvert.

Ensuite, on a $\partial E \cap E = \emptyset$ ssi $(\overline{E} \setminus E^\circ) \cap E = \emptyset$ ssi $E \subseteq E^\circ$ ssi $E = E^\circ$.

c) $E^\circ = E \setminus \partial E$

d) X est l'union disjointe des ensembles deux à deux disjoints E°, ∂E et $(E^c)^\circ$

Solution. Il y a deux chose à montrer. D'abord, on montre que $X = E^\circ \cup \partial E \cup (E^c)^\circ$. Cela est clair, puisque $E^\circ \cup \partial E = \overline{E}$ et que $(E^c)^\circ = \overline{E}^{\,c}$.

Ensuite, il faut montrer que l'intersection de chaque pair d'ensemble est vide. Puisque $\partial E = \overline{E} \backslash E^\circ$, il est clair que $\partial E \cap E^\circ = \emptyset$. De plus, comme $(E^c)^\circ = \overline{E}^c$ et que $\overline{E} = E \cup \partial E$, on obtient que $\partial E \cap (E^c)^\circ = \emptyset$. Enfin, on sait que $(E^c)^\circ \subseteq E^c$, donc il suit que $(E^c)^\circ \cap E^\circ = \emptyset$.

e) E est ouvert et fermé si et seulement si $\partial E = \emptyset$

Solution. On a que $\partial E = \emptyset$ ssi $\overline{E} \setminus E^\circ = \emptyset$ ssi $\overline{E} \subseteq E^\circ$ ssi E est ouvert et fermé. (Le dernier ssi vient des inclusions $E^\circ \subseteq E \subseteq \overline{E}$.)

f) $\partial E = \partial(E^c)$

Solution. On a $\partial(E^c) = \overline{E^c} \setminus (E^c)^\circ = (E^\circ)^c \setminus (\overline{E})^c \overset{*}{=} \overline{E} \setminus E^\circ = \partial E$, où l'égalité $*$ est une propriété de la théorie des ensembles que vous pouvez vérifier. $(A^c \setminus B^c = B \setminus A)$

g) si $E \subseteq F$, alors $\overline{E} \subseteq \overline{F}$ et $E^\circ \subseteq F^\circ$, mais que la réciproque est fausse

h) $E \subseteq F$ n'implique pas que $\partial E \subseteq \partial F$

i) $\overline{E} \cup \overline{F} = \overline{E \cup F}$

Solution. L'ensemble $\overline{E} \cup \overline{F}$ est un fermé qui contient $E \cup F$, donc $\overline{E \cup F} \subseteq \overline{E} \cup \overline{F}$. Ensuite, $\overline{E \cup F}$ est un fermé qui contient E et F, donc $\overline{E}$ et $\overline{F}$ aussi, d'où $\overline{E} \cup \overline{F} \subseteq \overline{E \cup F}$.

j) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$ et que l'inclusion peut être stricte

Solution. On a que $\overline{E_k} \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$ car l'ensemble de droite est un fermé qui contient E_k.

Pour voir que l'inclusion peut être stricte, on prend $E_n = \{\frac{1}{n}\}$.

k) $\overline{E \cap F} \subseteq \overline{E} \cap \overline{F}$ et que l'inclusion peut être stricte

l) $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$

m) $E^\circ \cap F^\circ = (E \cap F)^\circ$

Solution. On a que $E^\circ \cap F^\circ$ est un ouvert de $E \cap F$, donc on a $E^\circ \cap F^\circ \subseteq (E \cap F)^\circ$.

Ensuite, $(E \cap F)^\circ$ est un ouvert de E° et de F°, donc il est inclus dans chacun d'eux.

n) $\displaystyle\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)^\circ \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^\circ$ et que l'inclusion peut être stricte

Solution. Par le j), on a

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)^\circ = \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c\right)^c\right]^\circ = \left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c}\right)^c \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n^c}\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\overline{E_n^c})^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^\circ.$$

Les ensembles $E_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ montrent que l'inclusion peut être stricte.

o) $E^\circ \cup F^\circ \subseteq (E \cup F)^\circ$ et que l'inclusion peut être stricte

p) $(E^\circ)^\circ = E^\circ$

q) $\overline{\partial E} = \partial E$

r) $\partial(E \cup F) \subseteq \partial E \cup \partial F$ et que l'inclusion peut être stricte

s) $\partial(\partial E) \subseteq \partial E$ et que l'inclusion peut être stricte

Solution. Puisque ∂E est fermé, on a $\partial(\partial E) = \overline{\partial E} \setminus (\partial E)^\circ = \partial E \setminus (\partial E)^\circ \subseteq \partial E$.

Ensuite, on voit que $\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}^\circ = \mathbb{R}$ et $\partial(\partial\mathbb{Q}) = \partial\mathbb{R} = \emptyset$.

t) $\partial(\partial(\partial E)) = \partial(\partial E)$.

Solution. On montre que $(\partial(\partial E))^\circ = \emptyset$. D'abord, on a que $\partial(\partial E) = \overline{\partial E} \setminus (\partial E)^\circ = \partial E \cap \big((\partial E)^\circ\big)^c$. Ensuite, en utilisant le m), on a

$$\begin{aligned}
(\partial(\partial E))^\circ &= \left(\partial E \cap \big((\partial E)^\circ\big)^c\right)^\circ \\
&= (\partial E)^\circ \cap \big(((\partial E)^\circ)^c\big)^\circ \\
&= (\partial E)^\circ \cap \left(\overline{(\partial E)^\circ}\right)^c \\
&\subseteq (\partial E)^\circ \cap ((\partial E)^\circ)^c \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Ainsi, on trouve que $\partial(\partial(\partial E)) = \overline{\partial(\partial E)} \setminus \big(\partial(\partial E)\big)^\circ = \partial(\partial E)$.