Topologie

Série 1

Espaces topologiques

1. Espaces métriques

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que toute boule pointé $\dot{B}(a, r)$, pour $a \in X$ et $r > 0$, est ouverte dans X.

Exercice 2. Vrai ou faux. Soit (X, d) un espace métrique et U_i $(i \in I)$ des ouverts de X. Alors $\bigcap_{i \in I} U_i$ n'est pas ouvert dans X.

Exercice 3. Ouvert relatif. Soit (X, d) un espace métrique et $E \subseteq Y \subseteq X$. Montrer que, lorsque (Y, d) est un sous-espace métrique, on a

$$E \text{ est ouvert dans } Y \Leftrightarrow \text{il existe } U \text{ ouvert dans } X \text{ tel que } E = U \cap Y.$$

Exercice 4. a) Dans $[0, \infty)$, caluler $[0, 1)^\circ$.

b) Montrer qu'il existe U ouvert dans $[0, \infty)$ tel que $[0, 1) = [0, \infty) \cap U$.

c) $[0, 1)$ est-il ouvert dans $[0, \infty)$?

Exercice 5. Soit $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

a) S^1 est-il ouvert dans $\mathbb{R}^2$?

b) S^1 est-il ouvert dans $\overline{B}\big((0, 0), 1\big)$?

c) S^1 est-il ouvert dans $\overline{B}\big((0, 0), 1\big) \setminus B\big((0, 0), 1\big)$?

Exercice 6. Soit $U_n = (0, 1 + 1/n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que U_n est ouvert dans $\mathbb{R}$ pour tout n, mais que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} U_n$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.

Les exercices 7 et 8 sont optionnels. Ils sont sensés être des rappels de mathématique discrète. Vous êtes tout de même encouragé·e à les faire.

Exercice 7. Soit X, Y des ensembles, soit I un ensemble d'indices et pour chaque $i \in I$, soit $A_i \subseteq X$ et $B_i \subseteq Y$ des sous-ensembles. Soit $f\colon X \to Y$ une fonction. Montrer les inclusions d'ensembles suivants.

a) $f^{-1}(\cup_{i\in I} B_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

b) $f^{-1}(\cap_{i\in I} B_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

c) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$ pour tout $B_1, B_2 \subseteq Y$

d) $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$ pour tout $B \subseteq Y$

e) $f(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} f(A_i)$

f) $f(\cap_{i\in I} A_i) \subseteq \cap_{i\in I} f(A_i)$

g) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$ pour tout $A_1, A_2 \subseteq X$

h) si f est injective, alors il y a égalité au f)

i) si pour tout $A_1, A_2 \subseteq X$, on a $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, alors f est injective

j) si f est injective, alors il y a égalité au g)

k) si pour tout $A_1, A_2 \subseteq X$, on a $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$, alors f est injective.

Exercice 8. Soit X, Y des ensembles et $f\colon X \to Y$ une fonction.

a) Est-ce que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$ pour tout $B \in Y$?

b) Est-ce que $f\big(f^{-1}(B)\big) \supseteq B$ pour tout $B \in Y$?

c) Est-ce que $f^{-1}\big(f(A)\big) \subseteq A$ pour tout $A \in X$?

d) Est-ce que $f^{-1}\big(f(A)\big) \supseteq A$ pour tout $A \in X$?

e) Pour les énoncés dont la réponse est non, quelle condition sur f est nécessaire et suffisante afin que la réponse devienne oui ?

Exercice 9. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si $f^{-1}\big((a,b)\big)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ pour tout $-\infty < a < b < \infty$, alors f est continue.

Exercice 10. Montrer que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est continue en utilisant la définition équivalente avec les ouverts.
Indice. Utiliser l'exercice précédent.

Exercice 11. Trouver un exemple d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et d'un ouvert U tels que $f(U)$ n'est pas ouvert.

Exercice 12. Soit X, Y, Z des ensembles et $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ des fonctions. a) Montrer que pour tout $A \subseteq Z$, on a $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\big(g^{-1}(A)\big)$.

b) Supposons maintenant que (X, d), (Y, d') et (Z, d'') sont espaces métriques. Montrer que si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

2. Espaces topologiques

Exercice 13. Pour chaque $\tau \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ suivant, déterminer si c'est une topologie ou non sur $\mathbb{R}$.

a) $\tau = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$

b) $\tau = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ borné}^*\} \cup \{\mathbb{R}\}$

c) $\tau = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A^c \text{ est fini}\} \cup \{\emptyset\}$

d) $\tau = \{(-a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$

*Rappel : borné veut dire qu'il existe $r > 0$ tel que $A \subseteq B(0, r)$.

Exercice 14. Soit X un ensemble et τ et τ' deux topologies sur X. Montrer que $\tau \cap \tau' = \{A \subseteq \mathcal{P}(X) \mid A \in \tau \text{ et } A \in \tau'\}$ est une topologie sur X.

Exercice 15. Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ qui vérifie les propriétés d'une base : 1. pour tout $x \in X$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B$ et 2. pour tout $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et pour tout $x \in B_1 \cap B_2$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

a) On définit $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ par $U \in \tau$ si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq U$. Montrer que τ est une topologie sur X.

b) Montrer que $\tau = \tau(\mathcal{B})$.

c) Déduire que U est ouvert dans X si et seulement si U est une union d'éléments de $\mathcal{B}$.

Exercice 16. Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{A} = \{\{x\} \mid x \in X\}$.

a) Décrire les ouverts de $\tau(\mathcal{A})$. (C'est-à-dire faire la liste de tous les ouverts.)

b) $\mathcal{A}$ est-il une base de $\tau(\mathcal{A})$?

Exercice 17. Soit (X, τ) un espace topologique et $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un ensemble de sous-ensembles qui vérifie

i) $\tau = \tau(\mathcal{B})$;

ii) pour tout $x \in X$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B$;

iii) si $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$, alors $B_1 \cap \dots \cap B_n \in \mathcal{B}$.

a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de τ.

b) Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ qui vérifie *i* et *ii*. Montrer qu'il existe $\mathcal{B}$ tel que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est une base de $\tau(\mathcal{A})$.

c) Déduire que $U \in \tau(\mathcal{A})$ si et seulement s'il existe $A_{i,1}, A_{i,2}, \dots, A_{i,k_i} \in \mathcal{A}$, avec $i \in I$ et $k_i \in \mathbb{N}$ tel que
$$U = \bigcup_{i \in I} (A_{i,1} \cap A_{i,2} \cap \dots \cap A_{i,k_i}),$$
c'est-à-dire que U est une union quelconque d'intersections finis d'éléments de $\mathcal{A}$.

Exercice 18. Soit $\mathcal{A} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

a) Décrire la topologie $\tau(\mathcal{A})$ sur $\mathbb{R}$. (On l'appelle la *topologie de la limite inférieur.*)

b) Cette topologie est-elle plus fine ou moins fine que la topologie standard ?

Exercice 19. Soit $f\colon (X, \tau) \to (Y, \tau')$ une fonction entre deux espaces topologiques. Montrer que f est continue si et seulement si $f^{-1}(F)$ est fermé dans X pour tout F fermé dans Y.

Exercice 20. Soit X et Y des ensembles.

a) (Topologie finale) Soit τ_X une topologie sur X et $f\colon (X, \tau_X) \to Y$. Montrer que $\tau' := \{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \text{ est ouvert dans } X\}$ est une topologie sur Y.

b) (Topologie initiale) Soit τ_Y une topologie sur Y. Soit $f\colon X \to (Y, \tau_Y)$. Montrer que $\tau := \{f^{-1}(U) \subseteq X \mid U \text{ est ouvert dans } Y\}$ est une topologie sur X.

Exercice 21. Soit $X = [0, 1]$ un intervalle muni de la topologie standard. On considère la relation $\sim$ sur X définie par $x \sim y \Leftrightarrow [x = y \text{ ou } x = 0, y = 1 \text{ ou } x = 1, y = 0]$. (Ici, ce sont des « ou » exclusifs.)

a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

b) Décrire la topologie sur $X/{\sim}$. (Par exemple, donner une base de sa topologie.)

c) Soit $f\colon X/{\sim} \to \mathbb{R}$ définie par $f([x]) = \sin(2\pi x)$, où $[x]$ est la classe d'équivalence de x. Montrer que f est bien définie et que f est continue.
Rappel. Pour que f soit bien définie, il faut que pour tout $[x], [y] \in X/{\sim}$, si $[x] = [y]$, alors $f([x]) = f([y])$. Remarquez que $[x] = [y]$ ssi $x \sim y$.

3. Connexité

Exercice 22. Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la limite inférieure. Soit $-\infty < a < b < \infty$.

a) Montrer que $[a, b)$ n'est pas connexe.

b) Est-ce que (a, b) est connexe ?

Exercice 23. Vrai ou faux. Soit (X, τ) un espace topologique. Si $Y \subseteq X$ n'est pas connexe, alors X n'est pas connexe.

Exercice 24. Soit (Y, τ) muni de la topologie discrète et tel que $\operatorname{card}(Y) \geq 2$. Montrer que

$$X \text{ est connexe} \iff \text{chaque } f\colon X \to Y \text{ continue est constante.}$$

Remarque. Cette caractérisation de la connexité est surtout utile avec $Y = \{0, 1\}$.

Exercice 25. En utilisant le fait que l'image d'un connexe est connexe, montrer le théorème des valeurs intermédiaires. Autrement dit, montrer que si I est un intervalle et $f\colon I \to \mathbb{R}$ est continue, alors quelque soit $x, y \in I$ avec $x < y$ et $f(x) \neq f(y)$, pour tout z entre $f(x)$ et $f(y)$, il existe $x \leq a \leq y$ tel que $f(a) = z$.

Exercice 26. Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit que $C \subseteq V$ est *convexe* si pour tout $x, y \in C$, on a que $[x, y] \subseteq C$, où $[x, y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0, 1]\}$ est le segment de droite joignant x à y. Montrer que tout ensemble convexe est connexe.

Remarque. Un espace vectoriel normé est un espace métrique et donc topologique comme suit : on définit une métrique par $d(x, y) := \|x - y\|$.

Exercice 27. Montrer que $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{Q}$ est connexe si et seulement si E est un singleton.

Remarque. Un espace topologique (X, τ) qui est tel que les seuls sous-espaces connexes sont les singletons (et l'ensemble vide) est dit *totalement disconnexe*. Ainsi, $\mathbb{Q}$ avec la topologie standard est un exemple d'espace totalement disconnexe.

Exercice 28. Soit (X, τ) et (Y, τ') deux espaces topologiques et $f\colon X \to Y$ une fonction continue.

a) Montrer que si X est connexe par arcs, alors $f(X)$ est connexe par arcs.

b) Déduire que la connexité par arcs est une propriété topologique.

Exercice 29. a) Déterminer si $A := \partial B\big((0,0,0), 1\big) \cup \partial B\big((0,0,0), 2\big)$ est connexe ou non.

b) Déterminer si $B := \partial B\big((0,0,0), 1\big) \cup \partial B\big((0,0,0), 2\big) \cup \{(0,0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est connexe ou non.

Exercice 30. (Composantes connexes par arcs). Soit (X,τ) un espace topologiqe non vide.

a) Soit $x,y,z \in X$. Supposons que $\gamma_1\colon[0,1] \to X$ est un arc continu entre x et y et que $\gamma_2\colon[0,1] \to X$ est un arc continu entre y et z. On définit la *concaténation* de γ_1 et γ_2 par

$$\gamma_1\#\gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{si } 0 \le t < \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t-1), & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Montrer que $\gamma_1\#\gamma_2$ est bien un arc $[0,1] \to X$ continu de x à z.
Suggestion. Commencer par faire le travail avec l'arc

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{si } t \in [0,1), \\ \tilde{\gamma}_2(t), & \text{si } t \in [1,2]. \end{cases}$$

où $\tilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2(t-1)$.

b) On définit la relation $\sim$ sur X par $x \sim y$ ssi il existe un arc entre x et y. Montrer que $\sim$ est une relatin d'équivalence.
On appelle les classe d'équivalence de $X/\!\sim$ les *composantes connexes par arcs*

c) Montrer que X est connexe par arcs si et seulement si X n'a qu'une seule composante connexe par arcs, c'est-à-dire ssi $X/\!\sim$ n'a qu'une seule classe d'équivalence.

Exercice 31. Soit (X,τ) un espace topologique et $A,B \subseteq X$ des sous-espaces non vides.

a) Montrer que si A et B sont connexes par arcs et si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est connexe par arcs.

b) Montrer que si A et B sont connexes et si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est connexe.

c) Généraliser le a) et le b) comme suit : $A_i \subseteq X$ $(i \in I)$ connexes (resp. connexes par arcs), si $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe (resp. connexe par arcs).

Exercice 32. (Composantes connexes). Soit (X,τ) un espace topologiqe non vide.

a) Soit $\sim$ la relation sur X définie par $x \sim y$ si et seulement s'il existe $C \subseteq X$ connexe tel que $x,y \in C$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
On appelle les classes d'équivalence de $X/\!\sim$ les *composantes connexes* de X.

b) Montrer que pour tout $x \in X$, la classe d'équivalence $[x]$ est connexe. (Remarque : $[x] \subseteq X$ et est muni de la topologie relative.)

c) Montrer que pour $x \in X$, $[x]$ est le plus grand connexe de X qui contient x. Autrement dit, montrer que si $C \subseteq X$ est connexe et $x \in C$, alors $C \subseteq [x]$.

d) Montrer que X est connexe si et seulement si X n'a qu'une seule composante connexe.

e) Montrer que le nombre de composantes connexes est une propriété topologique.

Exercice 33. Soit (X,τ) et (Y,τ') des espaces topologiques connexes. Montrer que $X \times Y$ est connexe (sous la topologie produit).

4. Compacité

Exercice 34. Soit (X, τ) un espace topologique compact et discret. Montrer que X est fini.

Exercice 35. Soit D le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$ et soit $\dot{D} = D \setminus \{(0,0)\}$. Par le théorème de Heine-Borel, D est compact. Si $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de D, alors on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Puisque $\dot{D} \subseteq D$, ce sous-recouvrement recouvre $\dot{D}$. Donc $\dot{D}$ est compact.
Où est l'erreur dans ce raisonnement ?

Exercice 36. Soit (X, τ) un espace topologique compact. Soit $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ des fermés de X. Montrer que si $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F_n = \emptyset$ pour tout $n \geq N$.

Exercice 37. Soit X un ensemble et τ, τ' deux topologies sur X. Montrer que si (X, τ) est compact et si τ' est plus grossière que τ, alors (X, τ') est compact.

Exercice 38. Soit (X, τ) un espace topologique séparé. Soit $K_n \subseteq X$ des compacts.

a) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} K_n$ est compact si $N < \infty$.

b) Est-ce que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ est compact en général ?

c) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{N} K_n$ est compact si $N < \infty$.

d) Est-ce que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ est compact en général ?

Exercice 39. Soit (X, τ) un espace topologique de Hausdorff et $A, B \subseteq X$ des compacts disjoints. Montrer qu'il existe des ouverts disjoints U, V de X tels que $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.

Exercice 40. La sphère unité $S = \partial B(\vec{0}, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$ est-elle homéomorphe au plan $\mathbb{R}^2$?

Exercice 41. Soit (X, τ) un espace topologique et (Y, τ') un espace topologique compact. Soit $x_0 \in X$. Montrer que si V est un ouvert de $X \times Y$ tel que $\{x_0\} \times Y \subseteq V$, alors il existe U voisinage ouvert de x_0 dans X tel que $U \times Y \subseteq V$.

Remarque. On appelle parfois le voisinage ouvert $U \times Y$ un *tube*. Ce résultat est faux en général si Y n'est pas compact.

Exercice 42. Soit (X, τ) et (Y, τ') des espaces topologiques compacts. Montrer que $X \times Y$ est compact.
Indice. Soit $\{V_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $X \times Y$. Utiliser d'abord la compacité de Y sur $\{x\} \times Y$ et l'exercice précédent. Utiliser ensuite la compacité de X.

Remarque. Si (X_i, τ_i) sont des espaces topologiques compacts, il est vrai que le produit cartésien $\prod_{i \in I} X_i$ est compact lorsque le produit est muni de la topologie *produit*. C'est le théorème de Tychonoff, qui est bien plus difficile que le cas d'un produit fini.

Exercice 43. (Optionnel, pour ceux/celles qui ont fait un cours d'algèbre de groupes). Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On dit que G est un *groupe topologique* si G est muni d'une topologie τ telle que $\cdot : G \times G \to G$ et ${}^{-1} : G \to G$ (l'inversion) sont continues.

Remarque. Certain·e·s auteur·trices demandent aussi que G soit T_1, auquel cas on peut montrer que G est alors T_2. Pour cet exercice, on suppose que G est T_1.

a) Montrer que G est un groupe topologique si et seulement si

   i) si W est un voisinage de xy, alors il existe U et V, un voisinage de x et y respectivement, tels que $UV \subseteq W$, où $UV := \{ab \mid a \in U, b \in V\}$, et

   ii) quelque soit $x \in G$ et pour tout voisinage ouvert V de x^{-1}, il existe un ouvert U tel que $x \in U$ et $U^{-1} \subseteq V$, où $U^{-1} := \{a^{-1} \mid a \in U\}$.

b) Soit A, B des sous-espaces de G. Montrer que si A est fermé dans G et si B est compact, alors AB est fermé dans G.
   Indice. Si $c \in (AB)^c$, trouver un voisinage ouvert W de c tel que WB^{-1} et A sont disjoints.

c) Soit H un sous-groupe normal de G. Soit $p : G \to G/H$ l'application quotient. Montrer que si H est compact, alors p est fermée.

d) Soit H un sous-groupe normal compact de G. Montrer que si G/H est compact, alors G est compact.

5. Propriétés locales

Exercice 44. Soit (X, τ) un espace topologique. Montrer que si pour tout U ouvert dans X, les composantes connexes de U sont ouvertes dans X, alors X est localement connexe.

Exercice 45. Soit (X, τ) un espace topologique. Montrer que X est localement connexe par arcs si et seulement si pour tout U ouvert dans X, les composantes connexes par arcs de U sont ouvertes dans X.

Exercice 46. Soit (X, τ) un espace topologique et soit $U \subseteq X$ un ouvert de X. Montrer que si X est connexe et localement connexe par arcs, alors X est connexe par arcs.

Exercice 47†. Le but de l'exercice est de montrer que connexe $\not\Rightarrow$ localement connexe.
Soit $X = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0,1]\}$.

a) Montrer que X est connexe.

b)† On tient pour acquis que $\overline{X}$ est connexe (ou peut faire appel à l'exercice 52b). Montrer que $\overline{X} = X \cup (\{0\} \times [-1,1])$.

c) On pose $z := (0,0) \in \overline{X}$. Montrer que pour tout voisinage ouvert $V \subseteq B(z, 1/2)$ de z dans $\overline{X}$ n'est pas connexe.

d) Déduire que $\overline{X}$ n'est pas localement connexe.

Exercice 48†. Le but de l'exercice est de montrer que connexe par arcs $\not\Rightarrow$ localement connexe par arcs.
On pose $D_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $D_0 = \{0\} \times [0,1]$ et

$$X := [0,1] \times \{0\} \cup D_0 \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n \right).$$

a) Montrer que X est connexe par arcs.

b) On pose $z := (0,1) \in X$. Montrer que tout voisinage ouvert $V \subseteq B(z, 1/2)$ de z n'est pas connexe par arcs.

c) Déduire que X n'est pas localement connexe par arcs.

Exercice 49. Soit (X, τ) un espace topologique séparé. Montrer que X est localement compact si et seulement si pour tout $x \in X$, il existe un compact $K \subseteq X$ qui contient un voisinage ouvert U de x.

Exercice 50. Identifier la compactification en un point des espaces suivants. (Il est suffisant de décrire un espace homéomorphe au compactifié. P.ex. S^1 dans le cas $\mathbb{R}$.)

a) $X = [a, b)$, où $-\infty < a < b < \infty$.

b) $X = (a, b)$, où $-\infty < a < b < \infty$.

c) $X = (0,1) \cup (1,2)$.

6. Exercices supplémentaires

Exercice 51. Démontrer le lemme du recollement : Soit (X, τ) un espace topologique et $A, B \subseteq X$ des fermés de X tels que $X = A \cup B$. Soit (Y, τ') un espace topologique et $f \colon A \to Y$, $g \colon B \to Y$ des fonctions continues. Montrer que si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A \cap B$, alors

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A, \\ g(x), & \text{si } x \in B \end{cases}$$

est continue.

Exercice 52. Soit (X, τ) un espace topologique et $A, B \subseteq X$ des sous-espaces.

a) Montrer que si A est connexe et si $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, alors B est connexe.

b) Déduire que si A est connexe, alors $\overline{A}$ est connexe.

Exercice 53. Soit (X, τ) un espace topologique et $E, F, E_1, E_2, \ldots \subseteq X$. Montrer que

a) $\overline{E^c} = (E^\circ)^c$

b) E est ouvert $\Leftrightarrow E^\circ = E \Leftrightarrow \partial E \cap E = \emptyset$

c) $E^\circ = E \setminus \partial E$

d) X est l'union disjointe des ensembles deux à deux disjoints E°, ∂E et $(E^c)^\circ$

e) E est ouvert et fermé si et seulement si $\partial E = \emptyset$

f) $\partial E = \partial(E^c)$

g) si $E \subseteq F$, alors $\overline{E} \subseteq \overline{F}$ et $E^\circ \subseteq F^\circ$, mais que la réciproque est fausse

h) $E \subseteq F$ n'implique pas que $\partial E \subseteq \partial F$

i) $\overline{E} \cup \overline{F} = \overline{E \cup F}$

j) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$ et que l'inclusion peut être stricte

k) $\overline{E \cap F} \subseteq \overline{E} \cap \overline{F}$ et que l'inclusion peut être stricte

l) $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$

m) $E^\circ \cap F^\circ = (E \cap F)^\circ$

n) $\displaystyle\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)^\circ \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^\circ$ et que l'inclusion peut être stricte

o) $E^\circ \cup F^\circ \subseteq (E \cup F)^\circ$ et que l'inclusion peut être stricte

p) $(E^\circ)^\circ = E^\circ$

q) $\overline{\partial E} = \partial E$

r) $\partial(E \cup F) \subseteq \partial E \cup \partial F$ et que l'inclusion peut être stricte

s) $\partial(\partial E) \subseteq \partial E$ et que l'inclusion peut être stricte

t) $\partial(\partial(\partial E)) = \partial(\partial E)$.