Topologie

Série 2

Homotopie

Exercice 1. Trouver une homotopie entre les fonctions suivantes.

a) $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos(y) \\ x\sin(y) \end{pmatrix}, \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

b) $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$f(t) = \begin{pmatrix} -(1-t)+t \\ -1 \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} -(1-t)+t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solution. a) Plusieurs choix possibles. Le H suivant

$$H\big((x,y),t\big) = \begin{pmatrix} (1-t)x\cos y + tx \\ (1-t)x\sin(y) + ty \end{pmatrix}$$

fait l'affaire. (Je vous laisse vérifier.)

b) Il y a plusieurs choix possibles, mais il faut faire attention que $H(s,t) \neq (0,0)$ pour tout $s,t \in [0,1]$. Voici une façon de procéder.

Pour $(s,t) \in [0,1] \times \big[0, \frac{1}{2}\big]$, on considère

$$F(s,t) = \begin{pmatrix} \big(-(1-s)+s\big)(1-2t)+2t \\ -(1-\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

de sorte que $F(s,0) = f(s)$ et $F(s,\frac{1}{2}) = (1,0)$. Comme la deuxième composante de F est nulle ssi $t = \frac{1}{2}$, on sait que $F(s,t) \neq (0,0)$.

Ensuite, pour $(s,t) \in [0,1] \times \big[\frac{1}{2}, 1\big]$, on considère

$$G(s,t) = \begin{pmatrix} 2(1-t) + 2\big(t-\frac{1}{2}\big)\big(-(1-s)+s\big) \\ 2\big(t-\frac{1}{2}\big) \end{pmatrix}$$

On a $G(s,1) = g(s)$ et $G(s,\frac{1}{2}) = (1,0)$. De plus, la deuxième composante de G est nulle ssi $t = \frac{1}{2}$, donc $G(s,t) \neq (0,0)$.

La fonction F glisse f vers la fonction constante $(1,0)$ et la fonction G glisse cette fonction constante vers g. Pour obtenir l'homotopie souhaitée, il suffit de combiner F et G. On définit

$$H(s,t) = \begin{cases} F(s,t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(s,t), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Comme $F(s,\frac{1}{2}) = G(s,\frac{1}{2})$ pour tout $s \in [0,1]$, H est continue par le lemme du recollement. (Vous pouvez écrire les détails, au besoin.)

Exercice 2. Trouver une homotopie stricte entre les chemins suivants.

a) $\alpha, \beta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t-t^2 \end{pmatrix}, \quad \beta(t) = \begin{pmatrix} \cos\big(\pi(t+1)\big) \\ \sin\big(\pi(t+1)\big) \end{pmatrix}$$

b) $\alpha, \beta\colon [0,1] \to S^2$

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \beta(t) = \begin{pmatrix} \cos(t-t^2)\cos\big(t-t^2-\frac{\pi}{2}\big) \\ \sin(t-t^2)\cos\big(t-t^2-\frac{\pi}{2}\big) \\ \sin\big(t-t^2-\frac{\pi}{2}\big) \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit $\alpha, \beta\colon [0,1] \to (X, \tau)$ des chemins, $f, g\colon (Z, \tau'') \to (X, \tau)$ et $h\colon (X, \tau) \to (Y, \tau')$ des fonctions continues.

a) Montrer que si $f \overset{H}{\simeq} g$, alors $h \circ f \overset{h \circ H}{\simeq} h \circ g$.

b) Montrer que si $\alpha \overset{H}{\simeq}_* \beta$, alors $h \circ \alpha \overset{h \circ H}{\simeq}_* h \circ \beta$.

Solution. b) Il suffit de voir que $h \circ H(s,0) = h \circ \alpha(s)$, $h \circ H(s,1) = h \circ \beta(s)$, $h \circ H(0,t) = h\big(\alpha(0)\big)$ et $h \circ H(1,t) = h\big(\alpha(1)\big)$, donc $h \circ H$ est bien une homotopie stricte entre $h \circ \alpha$ et $h \circ \beta$.

Exercice 4. Montrer que $\mathbb{R}^2$ et $B\big((0,0),1\big) \subseteq \mathbb{R}^2$ ont le même type d'homotopie.

Solution. Il y a plus d'une façon de procéder. En voici une.

On considère $H(x,t) = tx + (1-t)\frac{x}{\|x\|+1}$. Si on considère que $x \in \mathbb{R}^2$, alors H prend un point de $\mathbb{R}^2$ et le glisse vers l'intérieur de $B\big((0,0),1\big)$ lorsque t passe de 1 à 0. (La forme exacte de la partie $\frac{x}{\|x\|+1}$ n'est pas particulièrement importante. Il y aurait eu d'autres choix.)

C'est une fonction continue et $H(x,1) = x$. Ceci suggère de trouver des fonctions f et g de sorte que $f \circ g(x) = \frac{x}{\|x\|+1}$. On peut prendre, par exemple, $f\colon \mathbb{R}^2 \to B\big((0,0),1\big); x \mapsto \frac{x}{\|x\|+1}$ et $g\colon B\big((0,0),1\big) \to \mathbb{R}^2; x \mapsto x$.

Ceci montre que $f \circ g \overset{H}{\simeq} id_{B((0,0),1)}$ et $g \circ f \overset{H}{\simeq} id_{\mathbb{R}^2}$.

Remarquons que $\mathbb{R}^2$ et $B\big((0,0),1\big)$ sont homéomorphes, donc on aurait pu montrer qu'ils ont le même type d'homotopie en trouvant un homéomorphisme. En fait, $h\colon \mathbb{R}^2 \to B\big((0,0),1\big); x \mapsto \frac{x}{\|x\|+1}$ est un homéomorphisme (son inverse est $y \mapsto \frac{y}{\|y\|-1}$ pour $y \in B\big((0,0),1\big)$). L'avantage de la méthode avec les homotopies est qu'il n'est pas nécessaire de montrer qu'une certaine fonction est inversible et que son inverse est continu.

Exercice 5. Soit (X, τ) un espace topologique. Montrer que toute fonction continue $f\colon X \to \mathbb{R}^2$ est nullhomotope.

Solution. On considère $H(x,t) = (1-t)f(x)$. On a bien $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = 0$.

Exercice 6. Soit (X, τ), (Y, τ') et (Z, τ'') des espaces topologiques. Soit $f_1, f_2\colon X \to Y$ et $g_1, g_2\colon Y \to Z$ des fonctions continues. Montrer que si f_1, f_2 sont homotopes et g_1, g_2 sont homotopes, alors $g_1 \circ f_1$, $g_2 \circ f_2$ sont homotopes.

Exercice 7. Soit (X,τ) et (Y,τ') des espaces topologiques. On définit $[X,Y]$ l'ensemble des classes d'équivalence d'homotopie des fonctions de $X \to Y$, c'est-à-dire pour $[f] \in [X,Y]$, on a $[f] = \{g\colon X \to Y \mid g \simeq f\}$.

a) Soit $I := [0,1]$. Montrer que $[X,I]$ possède un seul élément.

b) Montrer que si Y est connexe par arcs, alors $[I,Y]$ possède un seul élément.

Solution. a) Soit $f,g\colon X \to [0,1]$ continues. On veut montrer que $g \simeq f$. Il suffit de prendre $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$. On a bien

$$H(x,t) \leq (1-t) + t = 1, \qquad \text{(car } f(x), g(x) \in [0,1])$$

et

$$H(x,t) \geq 0 + 0 = 0 \qquad \text{(car } f(x), g(x) \in [0,1]).$$

Ainsi H est une homotopie entre f et g. Comme f et g étaient quelconques, cela signifie que toute fonction continue $X \to [0,1]$ est dans la même classe d'homotopie.

b) Soit $f\colon [0,1] \to Y$ continues. On pose $a = f(0)$, $b = f(1)$. On définit $H(s,t) = f\big(s(1-t)+t\big)$. On a alors $H(s,0) = f(s)$ et $H(s,1) = f(1) = b$. Ainsi, f est homotope à la fonction constante $c_1(s) = b$.

Soit $c_2(s) = x_0$ une autre fonction constante. Il existe un chemin α de x_0 à b. On pose $G(s,t) = \alpha(t)$. On a $G(s,0) = x_0 = c_2(s)$ et $G(s,1) = b = c_1(s)$, donc G est une homotopie entre c_1 et c_2. Il suit que toute fonction continue de $[0,1] \to Y$ est homotope à une fonction constante et toutes les fonctions constantes sont dans la même classe d'homotopie. D'où $[I,Y]$ a un seul élément.

Exercice 8. Soit (X,τ) un espace topologique $f\colon X \to X$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) = x_0$. Montrer que si

1. $f \overset{H}{\simeq} id_X$ et
2. $H(x_0,t) = f(x_0)$ pour tout $t \in [0,1]$,

alors pour toute boucle $\alpha\colon [0,1] \to X$ de x_0 à x_0, on a $\alpha \simeq_* f \circ \alpha$.

Solution. On pose $F(s,t) := H\big(\alpha(s),t\big)$. C'est une fonction continue sur $[0,1] \times [0,1]$ et elle vérifie

- $F(s,0) = H\big(\alpha(s),0\big) = f\big(\alpha(s)\big) = f \circ \alpha(s)$ et

  $F(s,1) = H\big(\alpha(s),1\big) = id_X \circ \alpha(s) = \alpha(s)$;
- $F(0,t) = H(x_0,t) = f(x_0) = x_0$ et

  $F(1,t) = H(x_0,t) = x_0$.

Il suit que F est une homotopie stricte entre α et $f \circ \alpha$.

Exercice 9. Soit (X,τ) et (Y,τ') deux espaces topologiques. On suppose que X et Y ont le même type d'homotopie. Montrer que X est connexe par arcs si et seulement si Y est connexe par arcs.

Solution. Soit $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to X$ des fonctions continues telles que $f \circ g \overset{F}{\simeq} id_Y$ et $g \circ f \overset{G}{\simeq} id_X$.

Supposons que X est connexe par arcs. Soit $x, y \in Y$. Il existe un arc α de $g(x)$ à $g(y)$ dans X. Alors $f \circ \alpha$ est un arc dans Y de $f \circ g(x)$ à $f \circ g(y)$.

Ensuite, on voit que pour x fixé, $\gamma_x(s) := F(x, s)$ est un arc de $f \circ g(x)$ à x, puisque c'est une fonction continue de $[0, 1] \to Y$ et que $F(x, 0) = f \circ g(x)$ et $F(x, 1) = id_Y(x)$. De même, pour y fixé, $\gamma_y(s) := F(y, s)$ est un arc de $f \circ g(y)$ à y.

Ainsi, on obtient un arc entre x et y par $\overline{\gamma_x} \# f \circ \alpha \# \gamma_y$, où $\overline{\gamma_x}$ est le chemin inverse de γ_x. (Schématiquement, on a $x \xrightarrow{\overline{\gamma_x}} f \circ g(x) \xrightarrow{f \circ \alpha} f \circ g(y) \xrightarrow{\gamma_y} y$.)

Pour la réciproque, il suffit d'inverser les rôles de X et Y et d'utiliser G au lieu de F.