

Examen final

Topologie — MAT3363

Université de Montréal, département de mathématiques et de statistique

L'examen dure 2h50. **Justifiez bien toutes vos réponses.** Aucun matériel permis.

Enseignant : Jonathan Godin

Session : H25

Mardi le 15 avril 2025

/45

Question 1. (9pts) **Réponses courtes.** Les questions a), b) et c) sont indépendantes. Votre réponse devrait faire 2-3 lignes avec des dessins au besoin.

- a) Identifier la surface dont le symbole est $abcd a^{-1} b^{-1} d^{-1} c^{-1}$.
- b) Soit $p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow T; (x, y) \mapsto (x, y) \pmod{1}$. Représenter sur un dessin un voisinage distingué du point $(0, \frac{1}{2}) \in T$. (Bien détailler le dessin.)
- c) Vrai ou faux. Si l'énoncé est vrai, le montrer. S'il est faux, trouver un contre-exemple. Soit (X, τ) un espace topologique. Si $\pi_1(X, *) \cong \mathbb{Z}$, alors X est homéomorphe à S^1 .

Question 2. (12pts) Soit (X, p) un revêtement de B . On suppose que $k := \#p^{-1}(b_0) \in \mathbb{N}$. Montrer que si B est connexe, alors pour tout $b \in B$, on a $p^{-1}(b) = k$.

Question 3. (12pts) a) Calculer le groupe fondamental du disque ouvert dans $\mathbb{R}^2$ percé de cinq trous, comme sur la figure.

- b) L'espace topologique du a) est-il homéomorphe à la sphère S^2 percé de cinq trous?
- (Le bord des trous n'est pas inclus ni au a), ni au b).)



Figure. À gauche, disque troué du a); à droite, sphère trouée du b)

Question 4. (12pts) Soit G un graphe fini* dans $\mathbb{R}^2$, où les sommets sont des points et les arêtes, des segments de droites, que l'on muni de la topologie relative à $\mathbb{R}^2$. On suppose qu'il existe deux sommets e, f différents qui ne sont pas déjà reliés par une arête. On considère le graphe $\tilde{G}$ obtenu de G en ajoutant cet arête. Montrer que si les arêtes de $\tilde{G}$ (et donc de G) ne se croisent pas, alors $\pi_1(\tilde{G}, e) \cong \pi_1(G, e) * \mathbb{Z}$.

* Par fini, on veut dire que G possède un nombre fini de sommets et d'arêtes.