Examen intra 1

Analyse 3

MAT2100

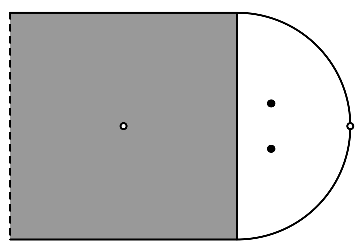
L'examen dure 1h50. **Justifiez toutes vos réponses**, sauf indication contraire. Aucun matériel permis.

Enseignant : Jonathan Godin
Session : H23

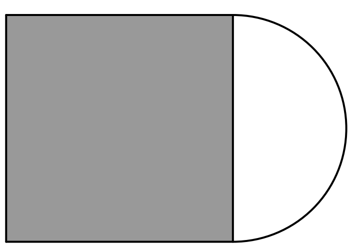
/30

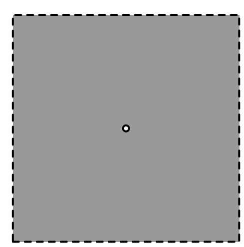
Question 1. (4pts) Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble représenté par le dessin ci-bas. On utilise les conventions suivantes : un trait pointillé ne fait pas partie de E, un trait plein signifie qu'il est dans E, un point représente un singleton dans E, un point vide singnifie qu'il n'est pas dans E, la région en gris est dans E, mais pas celle en blanc. Dessiner les ensembles suivants dans votre cahier d'examen **sans justifier**. Expliquer à l'aide de mots les détails importants d'un dessin au besoin.

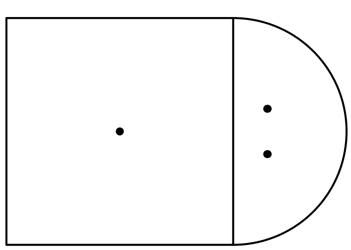
a) E' b) E° c) ∂E d) points isolés de E



Solution.

a) 

b) 

c) 

d)

Question 2. (6pts) Soit (X, d) un espace métrique discret*. Quelles sont les suites conver-

* Rappel : un espace métrique est discret si tous les points sont des points isolés.

gentes de X ?

Solution. Une suite (x_n) converge si et seulement si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $x_n = x_N$.

Supposons que (x_n) converge vers x. Puisque x est isolé, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) = \{x\}$. Puisque $x_n \to x$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $d(x_n, x) < r$. Il suit que $x_n \in B(x, r) = \{x\}$, c'est-à-dire que $x_n = x$.

La réciproque est claire. En effet, si $x_n = x_N$ pour tout $n \geq N$, alors on a $d(x_n, x_N) = 0$ et donc $d(x_n, x_N) \to 0$ lorsque $n \to \infty$, d'où (x_n) est convergente.

Question 3. (10pts) Soit l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d_2)$ et soit $E \subseteq \mathbb{R}^2$ défini par

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Q} \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

a) Calculer E°.

b) Calculer ∂E. L'ensemble E est-il fermé ?

Solution. a) On montre que $E^\circ = \emptyset$. Soit $z \in E$ et $r > 0$. On écrit $z = (x, y)$. Puisque $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $q_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $|x - q| < r$. Ainsi, on voit que

$$d\big(z, (q, y)\big) = \sqrt{|x - q|^2 + 0} = |x - q| < r.$$

Ainsi, on voit que $(q, y) \in B(z, r)$, mais $(q, y) \notin E$, donc $B(z, r) \not\subseteq E$, d'où $z \notin E^\circ$.

b) On montre que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}^2$. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors il existe deux suites (x_n) et (y_n) dans $\mathbb{Q}$ telles que $x_n \to x$ et $y_n \to y$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, on a $(x_n, y_n) \to (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$, où $\big((x_n, y_n)\big)$ est une suite de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Ensuite, on a

$$\overline{E} = \overline{(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap \overline{B}\big((0,0), 1\big)} = \overline{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}} \cap \overline{B}\big((0,0), 1\big) = \mathbb{R}^2 \cap \overline{B}\big((0,0), 1\big) = \overline{B}\big((0,0), 1\big).$$

Puisque $\overline{B}\big((0,0), 1\big) \neq E$, il suit que E n'est pas fermé.

De plus, puisque $E^\circ = \emptyset$, on conclut que

$$\partial E = \overline{E} \setminus E^\circ = \overline{E} \setminus \emptyset = \overline{E} = \overline{B}\big((0,0), 1\big).$$

Question 4. (10pts) Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et soit $f \colon X \to Y$ une fonction continue. Soit $a \in X$ un point de X. Montrer que

$$E = \{x \in X \mid f(x) \neq f(a)\}$$

est ouvert dans X.

Solution. Soit $x \in E$. Par définition de E, on a $f(x) \neq f(a)$. On pose $\varepsilon = d'\big(f(x), f(a)\big) > 0$. Puisque f est continue, il existe $\delta > 0$ tel que $f\big(B(x, \delta)\big) \subseteq B\big(f(x), \varepsilon\big)$. On remarque que $f(a) \notin B\big(f(x), \varepsilon\big)$ par le choix de ε.

Soit $y \in B(x, \delta)$. Puisque $f(y) \in f\big(B(x, \delta)\big) \subseteq B\big(f(x), \varepsilon\big)$, on a que $f(y) \neq f(a)$ et donc $y \in E$. Il suit que $B(x, \delta) \subseteq E$ et donc que $x \in E^\circ$. Comme x était quelconque, on déduit que $E \subseteq E^\circ$, d'où E est ouvert.