Examen intra
Topologie — MAT3363

Université de Montréal, département de mathématiques et de statistique

L'examen dure 1h50. **Justifiez bien toutes vos réponses**. En cas de doute, il est préférable de donner plus de détails que moins (si le temps le permet). Aucun matériel permis.

Enseignant : Jonathan Godin
Session : H25
Lundi le 17 février 2025

/35

Question 1. (5pts) Soit (X, τ) et (Y, τ') des espaces topologiques et $A, B \subseteq X$ des sous-ensembles. Les questions a) et b) sont indépendantes.

a) Montrer que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) Montrer que si A est fermé dans X et B est ouvert dans X, alors $A \setminus B$ est fermé dans X.

Question 2. (10pts) Soit (X, τ) et (Y, τ') des espaces topologiques et $f\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon Y \to \mathbb{R}$ et $h\colon X \to Y$ des fonctions continues. L'espace produit $X \times Y$ est muni de la topologie produit. Les questions a) et b) sont indépendantes.

a) Montrer que $E = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) < g(y)\}$ est ouvert dans $X \times Y$.

b) Montrer que si X est connexe, alors $G = \Big\{\big(x, h(x)\big) \in X \times Y \mid x \in X\Big\}$ est connexe.

Question 3. (10pts) Soit (X, τ) un espace topologique, $id\colon X \to X; x \mapsto x$ l'identité et $x_0 \in X$ un point fixé. On suppose que id est homotope à la fonction constante $c(x) = x_0$. Montrer que X est connexe par arcs.

Question 4. (10pts) Soit (X, τ) un espace topologique et (Y, τ') un espace compact. L'espace produit $X \times Y$ est muni de la topologie produit. Montrer que la projection $\pi\colon X \times Y \to X; (x, y) \mapsto x$ est fermée, c'est-à-dire que pour tout fermé F de $X \times Y$, $\pi(F)$ est fermé dans X.

Indice. Vous pouvez utiliser le lemme du tube : si W est ouvert dans $X \times Y$ et $\{x_0\} \times Y \subseteq W$, alors il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans X tel que $U \times Y \subseteq W$.