Examen intra

Topologie — MAT3363

Université de Montréal, département de mathématiques et de statistique

L'examen dure 1h50. **Justifiez bien toutes vos réponses**. En cas de doute, il est préférable de donner plus de détails que moins (si le temps le permet). Aucun matériel permis.

Enseignant : Jonathan Godin
Session : H25
Lundi le 17 février 2025

/35

Question 1. (5pts) Soit (X,τ) et (Y,τ') des espaces topologiques et $A, B \subseteq X$ des sous-ensembles. Les questions a) et b) sont indépendantes.

a) Montrer que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) Montrer que si A est fermé dans X et B est ouvert dans X, alors $A \setminus B$ est fermé dans X.

Solution. a) $A \cap B \subseteq A \subseteq \overline{A}$ et $A \cap B \subseteq B \subseteq \overline{B}$, donc $A \cap B \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Comme ce dernier est un fermé, il doit contenir $\overline{A \cap B}$, puisque celui-ci est le plus petit fermé qui contient $A \cap B$. D'où $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) On a $A \setminus B = A \cap B^c$. Comme B est ouvert, B^c est fermé, donc $A \cap B^c$ est fermé.

Question 2. (10pts) Soit (X,τ) et (Y,τ') des espaces topologiques et $f\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon Y \to \mathbb{R}$ et $h\colon X \to Y$ des fonctions continues. L'espace produit $X \times Y$ est muni de la topologie produit. Les questions a) et b) sont indépendantes.

a) Montrer que $E = \{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) < g(y)\}$ est ouvert dans $X \times Y$.

b) Montrer que si X est connexe, alors $G = \{(x, h(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ est connexe.

Solution. a) On pose $h(x,y) = f(x) - g(y)$ et $H(x,y) = \big(f(x), g(y)\big)$.

Remarquons que $E = h^{-1}\big((-\infty, 0)\big)$, donc il suffit donc de montrer que h est continue.

Soit $(a,b) \times (c,d) \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y) \in H^{-1}\big((a,b) \times (c,d)\big) &\iff H(x,y) \in (a,b) \times (c,d) \\
&\iff \big(f(x), g(y)\big) \in (a,b) \times (c,d) \\
&\iff f(x) \in (a,b) \quad \text{et} \quad g(y) \in (c,d) \\
&\iff x \in f^{-1}\big((a,b)\big) \quad \text{et} \quad y \in g^{-1}\big((c,d)\big) \\
&\iff (x,y) \in f^{-1}\big((a,b)\big) \times g^{-1}\big((c,d)\big).
\end{aligned}$$

On a donc $H^{-1}\big((a,b) \times (c,d)\big) = f^{-1}\big((a,b)\big) \times g^{-1}\big((c,d)\big)$, qui est ouvert dans $X \times Y$ puisque

f et g sont ouverts. De plus, les rectangles $(a,b)\times(c,d)$ forment une base de la topologie de $\mathbb{R}^2$, donc on conclut que H est continue. Enfin, $-\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est continue, donc h est continue, vue comme composition de H et $-$ qui sont continues.

b) On définit $h(x)=\big(x,f(x)\big)$. On a $h(X)=G$, donc il suffit de montrer que h est continue. On se rappelle que $\{U\times V : U \text{ ouvert dans } X \text{ et } V \text{ ouvert dans } Y\}$ est une base de la topologie de $X\times Y$. Soit $U\times V$ un élément de cette base. On a

$$\begin{aligned} x\in h^{-1}(U\times V) \iff h(x)\in U\times V &\iff \big(x,f(x)\big)\in U\times V \\ &\iff x\in U \text{ et } f(x)\in V \\ &\iff x\in U \text{ et } x\in f^{-1}(V) \\ &\iff x\in U\cap f^{-1}(V). \end{aligned}$$

Or, comme f est continue, $f^{-1}(V)$ est ouvert, donc $U\cap f^{-1}(V)$ est ouvert. D'où h est continue.

Autre solution. Supposons que G n'est pas connexe. Soit U,V une séparation de G. On définit

$$U_X=\{x\in X \mid (x,h(x))\in U\}$$

$$V_X=\{x\in X \mid (x,h(x))\in V\}.$$

Montrons que U_X,V_X est une séparation de X.

- Puisque U n'est pas vide, il y a $(x,h(x))\in U$, donc $x\in U_X$. De même pour V_X.
- $U_X\cup V_X=X$, car pour car pour chaque $x\in X$, $(x,h(x))\in U\cup V$.
- Si $x\in U_X\cap V_X$, alors $(x,h(x))\in U$ et $(x,h(x))\in V$, donc $(x,h(x))\in U\cap V=\emptyset$, donc il n'y a aucun tel x. D'où $U_X\cap V_X=\emptyset$.
- Soit $x\in U_X$. Comme U est ouvert, il existe A_x voisinage ouvert de x dans X et B_x voisinage ouvert de $h(x)$ dans Y tel que $(x,h(x))\subseteq A_x\times B_x\subseteq U$. De plus, on a $(y,h(y))\in A_x\times B_x$ ssi $[y\in A_x$ et $h(y)\in B_x]$ ssi $[y\in A_x$ et $y\in h^{-1}(B_x)]$ ssi $y\in A_x\cap h^{-1}(B_x)$. Comme $A_x\cap h^{-1}(B_x)$ est ouvert dans X et que $x\in A_x\cap h^{-1}(B_x)\subseteq U_X$, il suit que U_X est ouvert.
- On montre de la même façon que V_X est ouvert.

On peut enfin conclure que U_X,V_X est une séparation de X, ce qui est une contradiction.

Question 3. (10pts) Soit (X,τ) un espace topologique, $id\colon X\to X; x\mapsto x$ l'identité et $x_0\in X$ un point fixé. On suppose que id est homotope à la fonction constante $c(x)=x_0$. Montrer que X est connexe par arcs.

Solution. Soit $H\colon X\times[0,1]\to X$, l'homotopie entre id et c. Soit $x,y\in X$. On définit $\alpha(t):=H(x,t)$ et $\beta(t):=H(y,1-t)$.

On sait que α,β sont continues sur $[0,1]$ et $\alpha(0)=H(x,0)=x$ et $\alpha(1)=H(x,1)=x_0$, et $\beta(0)=H(y,1)=x_0$ et $\beta(1)=H(y,0)=y$. On a donc que $\alpha\#\beta$ est bien défini et c'est un chemin de x à y.

Question 4. (10pts) Soit (X, τ) un espace topologique et (Y, τ') un espace compact. L'espace produit $X \times Y$ est muni de la topologie produit. Montrer que la projection $\pi \colon X \times Y \to X; (x, y) \mapsto x$ est fermée, c'est-à-dire que pour tout fermé F de $X \times Y$, $\pi(F)$ est fermé dans X.

Indice. Vous pouvez utiliser le lemme du tube : si W est ouvert dans $X \times Y$ et $\{x_0\} \times Y \subseteq W$, alors il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans X tel que $U \times Y \subseteq W$.

Solution. On pose $G := \pi(F)$. On veut montrer que $X \setminus G$ est ouvert. Soit $x \in X \setminus G$. On a alors que $\{x\} \times Y \subseteq X \times Y \setminus F$. Comme ce dernier est ouvert dans $X \times Y$, il existe U un voisinage ouvert de x dans X tel que $U \times Y \subseteq X \times Y \setminus F$.

Pour chaque $z \in U$, on sait que $\{z\} \times Y$ et F sont disjoints, donc $z \notin G$. Il suit que U et G sont disjoints. Comme x est quelconque, cela montre que $X \setminus G$ est ouvert dans X. D'où G est fermé.