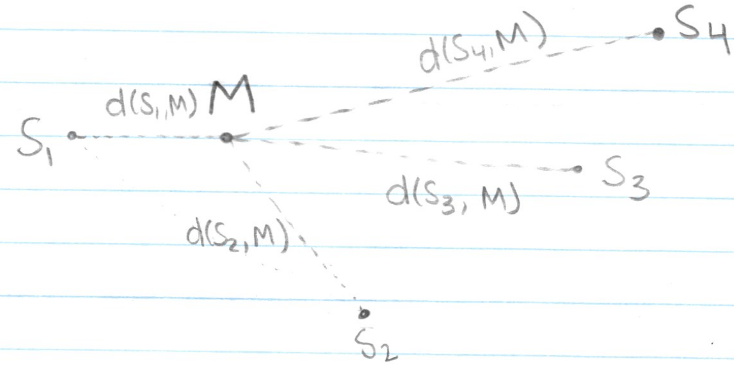
TP2 24 janvier 2025

Section 1.6

Exercice 4 : L'explosion d'une météorite entrant dans l'atmosphère génère une onde de choc se propageant dans toutes les directions à la vitesse du son v. L'onde de choc est détectée par des séismographes installés dans des stations au sol. Si quatres stations (possédant des horloges parfaitement synchronisées) notent l'heure d'arrivée de l'onde de choc, expliquer comment trouver la position et l'heure de l'explosion.

Solution :



Posons $M=(x,y,z)$ la position de l'explosion et $S_i=(a_i,b_i,c_i)$ la position de la i-ème station, pour $i=1,2,3,4$.

Posons T l'heure de l'explosion et t_i l'heure d'arrivée de l'onde de choc à la i-ème station, pour $i=1,2,3,4$.

On a

$$d(S_i,M)=v(t_i-T)$$

$$\Rightarrow (d(S_i,M))^2 = v^2(t_i-T)^2$$

$$\Rightarrow (x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2 = v^2(t_i-T)^2$$

pour $i=1,2,3,4$.

On résout de la même façon que dans le cas du GPS (p. 8)

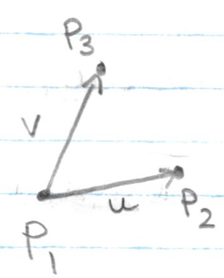
<u>Exercice 5:</u> Expliquer pourquoi, pour munir une carte d'un système de coordonnées permettant de repérer des points, il suffit de rentrer les coordonnées

de trois points non alignés. Quelle hypothèse faites-vous pour résoudre le problème?

<u>Solution:</u> P_1, P_2, P_3 nos trois points non alignés.

On en choisit un des trois qu'on considère comme l'origine, disons P_1.

On prend les vecteurs $u = P_2 - P_1$ et $v = P_3 - P_1$ et on a que $\{u, v\}$ est une base de notre plan.



u et v définissent un plan car ils ne sont pas colinéaire.

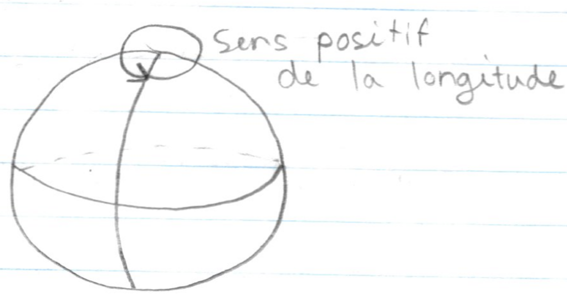
On doit faire l'hypothèse que la carte est un plan.

<u>Exercice 17:</u> Pour déterminer approximativement

votre longitude, vous pouvez utiliser le principe suivant. Vous mettez votre montre à l'heure du méridien de Greenwich. Vous notez l'heure qu'elle indique au moment où le soleil est au zénith. Expliquez comment vous calculez votre longitude.

<u>Solution</u>: Si on est au méridien de Greenwich, le soleil est au zénith à midi. Supposons qu'à notre position, le soleil est au zénith à l'heure T.

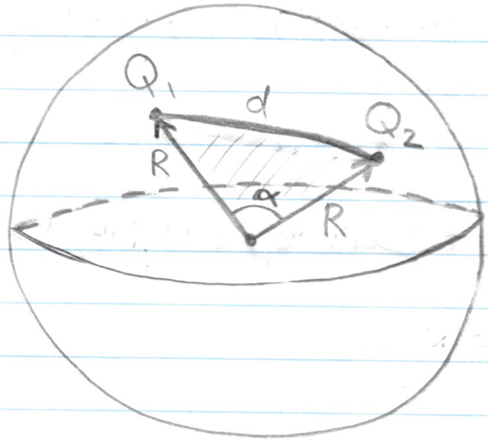
Comme la vitesse angulaire de la Terre est de $\frac{360°}{24h} = \frac{15°}{h}$, notre longitude est de $\frac{15°}{h}(12h - T)$.



Méridien de Greenwich

Exercice 19 : On se donne à la surface de la Terre (soit une sphère de rayon R) deux point $Q_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $Q_2 = (x_2, y_2, z_2)$ de longitudes respectives θ_1 et θ_2 et de latitudes respectives φ_1 et φ_2. Calculer la distance minimale à parcourir sur la Terre pour aller de Q_1 à Q_2.

Solution :



Soit α l'angle entre Q_1 et Q_2. On a

$$\langle Q_1, Q_2 \rangle = \|Q_1\| \|Q_2\| \cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = R^2 \cos(\alpha)$$

On passe aux coordonnées sphériques :

On a $x_1 = R\cos(\theta_1)\cos(\varphi_1)$
$y_1 = R\sin(\theta_1)\cos(\varphi_1)$
$z_1 = R\sin(\varphi_1)$

et $x_2 = R\cos(\theta_2)\cos(\varphi_2)$
$y_2 = R\sin(\theta_2)\cos(\varphi_2)$
$z_2 = R\sin(\varphi_2)$

Ainsi, on obtient

$$R^2\cos(\alpha) = R^2\cos(\theta_1)\cos(\varphi_1)\cos(\theta_2)\cos(\varphi_2) + R^2\sin(\theta_1)\cos(\varphi_1)\sin(\theta_2)\cos(\varphi_2) + R^2\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \cos(\theta_1)\cos(\varphi_1)\cos(\theta_2)\cos(\varphi_2) + \sin(\theta_1)\cos(\varphi_1)\sin(\theta_2)\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) \doteq K$$

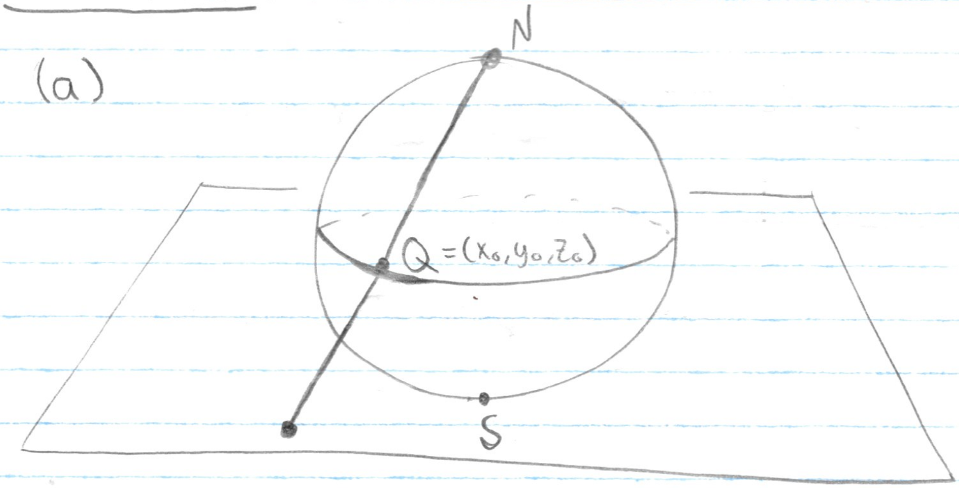
Ainsi, on a $\alpha = \arccos(K)$ et $d = R\cdot\arccos(K)$

Exercice 24 : On projette la sphère sur un plan tangent à la sphère en un point P. Soit P' le point diamétralement opposé à P. La projection se fait ainsi : si Q est un point de la sphère, sa projection est l'intersection de la droite P'Q avec le plan tangent à la sphère en P.

(a) Donner la formule de cette projection dans le cas où P est le pôle Sud et où on considère la sphère $x^2+y^2+z^2=1$.

Solution :

(a)



On a $NQ = (Q-N)t + N$

$$= ((x_0, y_0, z_0) - (0, 0, 1))t + (0,0,1)$$

$$= (x_0, y_0, z_0 - 1)t + (0,0,1)$$

On cherche l'intersection entre la droite $(x_0, y_0, z_0 - 1)t$ et le plan $z = -1$. On a

$$\begin{cases} x = x_0 t & ① \\ y = y_0 t & ② \\ z = (z_0 - 1)t + 1 = -1 \Rightarrow t = \dfrac{-2}{z_0 - 1} & ③ \end{cases}$$

③ et ① $\Rightarrow$ $x = \dfrac{-2x_0}{z_0 - 1}$

③ et ② $\Rightarrow$ $y = \dfrac{-2y_0}{z_0 - 1}$

On obtient donc la projection

$$(x_0, y_0, z_0) \longmapsto \left(\frac{-2x_0}{z_0 - 1}, \frac{-2y_0}{z_0 - 1}, -1\right)$$

Exercice 25 : Pour faire de la bonne cartographie, on doit plutôt représenter la Terre comme un ellipsoïde de révolution $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$. En généralisant un équivalent des coordonnées sphériques, les points de l'ellipsoïde peuvent s'écrire comme

$$(x,y,z) = (a\cos(\theta)\cos(\varphi), a\sin(\theta)\cos(\varphi), b\sin(\varphi))$$

La notion de longitude est la même que pour la sphère, soit θ, mais les géographes utilisent plutôt la latitude géodésique: la latitude géodésique d'un point P de l'ellipsoïde est l'angle entre la normale à l'ellipsoïde en P et le plan de l'équateur. Calculer la latitude en fonction de φ.

Solution: Considérons

$$f(\theta,\varphi) = (a\cos(\theta)\cos(\varphi), a\sin(\theta)\cos(\varphi), b\sin(\varphi))$$

On a $\dfrac{\partial f}{\partial \theta} = (-a\sin(\theta)\cos(\varphi), a\cos(\theta)\cos(\varphi), 0)$

et $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} = (-a\cos(\theta)\sin(\varphi), -a\sin(\theta)\sin(\varphi), b\cos(\varphi))$

Si P est donné par $f(\theta,\varphi)$, on a que la normale de l'ellipsoide en P est

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} ab\cos(\theta)\cos^2(\varphi) - 0 \\ 0 - (-ab\sin(\theta)\cos^2(\varphi)) \\ a^2\sin^2(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) + a^2\cos^2(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ab\cos(\theta)\cos^2(\varphi) \\ ab\sin(\theta)\cos^2(\varphi) \\ a^2\cos(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix} = N_P$$

La normale du plan de l'équateur est

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = N_E$$

On a $\langle N_E, N_P \rangle = \|N_P\| \|N_E\| \cos(\alpha)$, où α est l'angle entre N_E et N_P.

$\Rightarrow a^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)$

$$= \sqrt{a^2b^2\cos^2(\theta)\cos^4(\varphi) + a^2b^2\sin^2(\theta)\cos^4(\varphi) + a^4\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)} \cdot \cos(\alpha)$$

$$= |a||\cos(\varphi)|\sqrt{b^2\cos^2(\theta)\cos^2(\varphi)+b^2\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)+a^2\sin^2(\varphi)}\,\cos(\alpha)$$

$$= |a||\cos(\varphi)|\sqrt{b^2\cos^2(\varphi)+a^2\sin^2(\varphi)}\cdot\cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{a^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{|a||\cos(\varphi)|\sqrt{b^2\cos^2(\varphi)+a^2\sin^2(\varphi)}}$$

$$= k_\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \arccos(k_\varphi)$$

=> La latitude géodésique est égale à $\frac{\pi}{2} - \arccos(k_\varphi)$ si P est dans l'hémisphère nord et $\arccos(k_\varphi) + \frac{\pi}{2}$ si P est dans l'hémisphère sud.