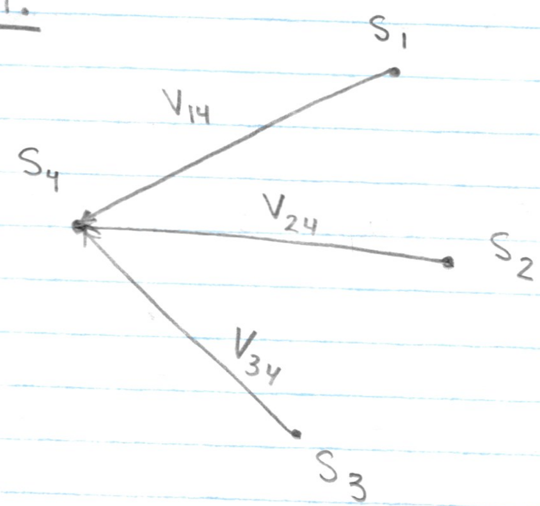
TP1

17 janvier 2025

Section 1.6

Exercice 1.



On a $S_i = (a_i, b_i, c_i)$ pour $i = 1,2,3,4$. Ainsi, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2(a_4-a_1) & 2(b_4-b_1) & 2(c_4-c_1) \\ 2(a_4-a_2) & 2(b_4-b_2) & 2(c_4-c_2) \\ 2(a_4-a_3) & 2(b_4-b_3) & 2(c_4-c_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} - & 2V_{14} & - \\ - & 2V_{24} & - \\ - & 2V_{34} & - \end{pmatrix}$$

Si les 4 satellites sont coplanaires, alors un des vecteurs lignes de A est une combinaison linéaire des deux autres $\Rightarrow \det(A) = 0$

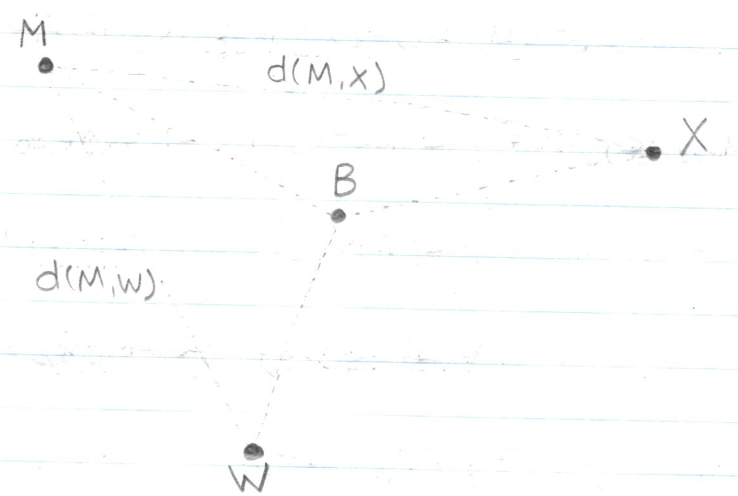
Si $\det(A) = 0$, alors $|\det(A)| = 0$

$\Rightarrow$ le volume du parallélépipède engendré par V_{14}, V_{24} et V_{34} est nul

$\Rightarrow$ V_{14}, V_{24} et V_{34} sont coplanaires

$\Rightarrow$ les 4 satellites sont coplanaires, par définition des vecteurs V_{14}, V_{24} et V_{34}.

Exercice 2.



B est le bateau, M est la station principale, et W et X sont des stations asservies (secondaires).

Posons τ_W le temps d'attente de la station W

τ_X le temps d'attente de la station X

t_M le temps de réception du signal de M

t_W le temps de réception du signal de W

t_X le temps de réception du signal de X

On a $t_M = \frac{d(M,B)}{c}$, $t_W = \frac{d(M,W)}{c} + \tau_W + \frac{d(W,B)}{c}$

et $t_X = \frac{d(M,X)}{c} + \tau_X + \frac{d(X,B)}{c}$, où c est la vitesse de la lumière.

(a) Le déphasage entre les stations M et W est

$$t_W - t_M = \frac{d(M,W) + d(W,B) - d(M,B)}{c} + \tau_W$$

$$\Rightarrow d(W,B) = (t_W - t_M - \tau_W) \cdot c + d(M,B) - d(M,W)$$

Le déphasage entre les stations M et X est

$$t_X - t_M = \frac{d(M,X) + d(X,B) - d(M,B)}{c} + \tau_X$$

$$\Rightarrow d(X,B) = (t_X - t_M - \tau_X) \cdot c + d(M,B) - d(M,X)$$

Donc, en connaissant deux déphasages, on connait $d(M,B)$, $d(W,B)$ et $d(X,B)$ et on peut trouver notre position

(b) $$t_X - t_W = \frac{d(M,X) + d(X,B) - d(M,W) - d(W,B)}{c} + \tau_X - \tau_W$$

$$\Rightarrow d(X,B) - d(W,B) = (t_X - t_W - \tau_X + \tau_W) \cdot c$$
$$- d(M,X) + d(M,W)$$

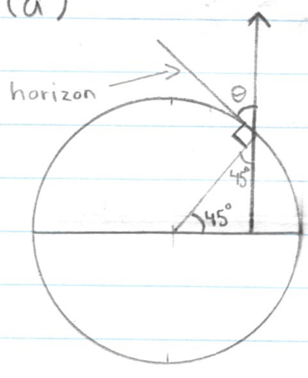
Si on connait le déphasage entre X et W, soit $t_X - t_W$, le côté droit de l'égalité est une constante, disons K.

On obtient donc $d(X,B) - d(W,B) = K$.

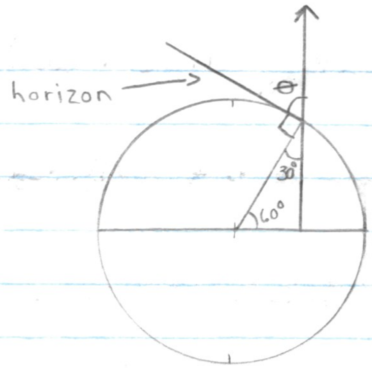
Une hyperbole est, par définition, un lieu géométrique où chaque point est tel que la différence de sa distance avec les deux foyers est constante. Donc, dans notre cas, le bateau B est sur une des branches d'une hyperbole ayant comme foyers les points W et X.

Exercice 14.

(a)

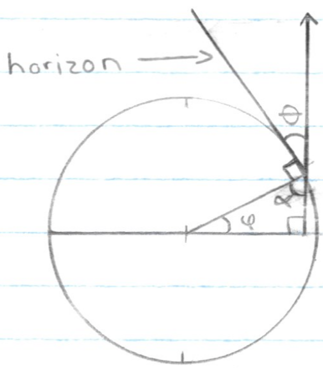


$\theta = 180° - 90° - 45° = 45°$



$$\theta = 180° - 90° - 30° = 60°$$

(b)

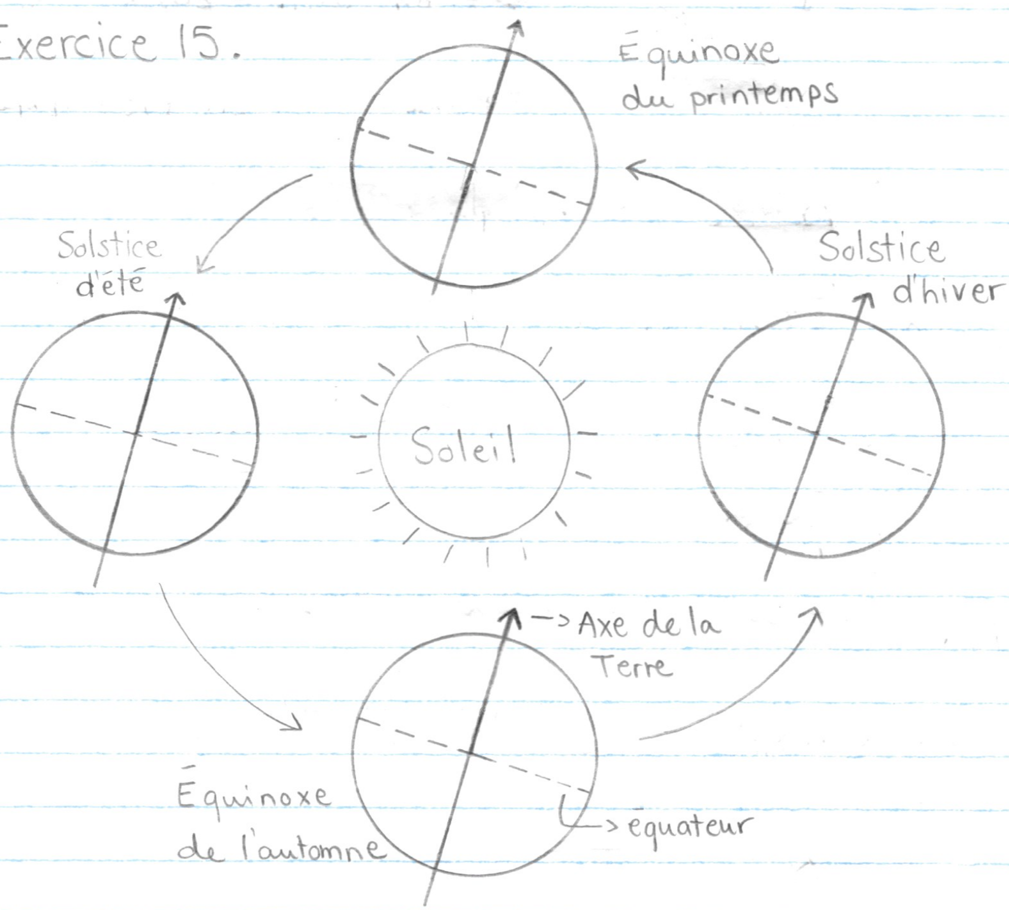


$$\varphi = 180° - 90° - \alpha$$

$$= 180° - 90° - (180° - 90° - \theta)$$

$$= \theta$$

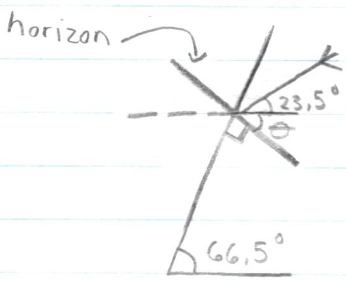
Exercice 15.



En (a), (b), (c), on cherche l'angle entre l'horizon et les rayons du soleil. Voici les angles entre l'équateur et les rayons du soleil à midi.

Solstice d'été — Équinoxes — Solstice d'hiver

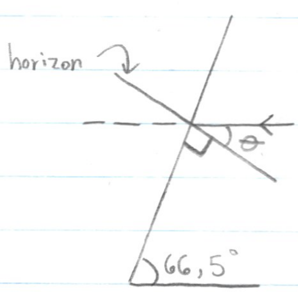
Donc, pour le (a), on a, au solstice d'été :



$\theta = 90° - 66,5° = 23,5°$

$\Rightarrow$ L'angle recherché est $23,5° + 23,5°$
$= 47°$

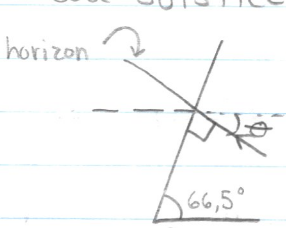
aux équinoxes :



$\theta = 90° - 66,5° = 23,5°$

$\Rightarrow$ L'angle recherché est de $23,5° + 0° = 23,5°$

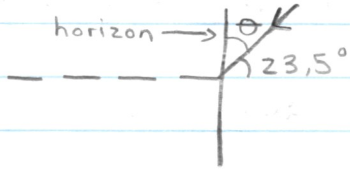
au solstice d'hiver :



$\theta = 90 - 66,5° = 23,5°$

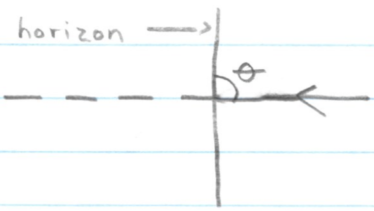
$\Rightarrow$ L'angle recherché est de $23,5° - 23,5° = 0°$

pour le (b), on a, au solstice d'été :



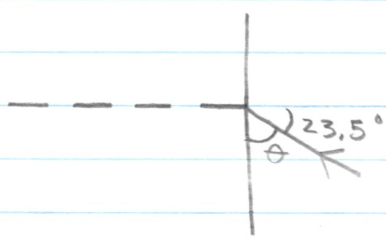
$\theta = 90° - 23,5° = 66,5°$ qui est l'angle recherché

aux équinoxes :



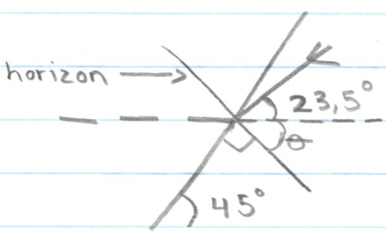
$\theta = 90°$ qui est l'angle recherché

au solstice d'hiver :



$\theta = 90° - 23,5° = 66,5°$ qui est l'angle recherché

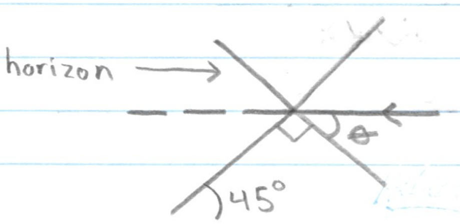
pour le (c), on a, au solstice d'été :



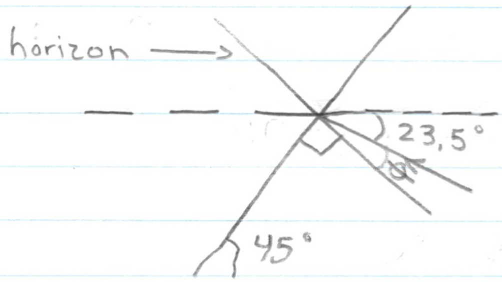
$\theta = 90° - 45° = 45°$

$\Rightarrow$ L'angle recherché est $45° + 23,5°$
$= 68,5°$

aux équinoxes :



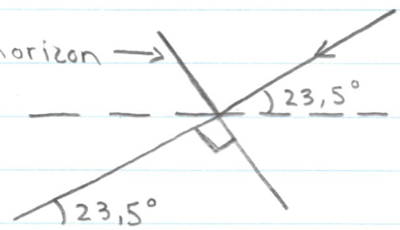
$\theta = 90 - 45°$ qui est l'angle recherché au solstice d'hiver :



$\theta = 90° - 45° - 23{,}5° = 21{,}5°$

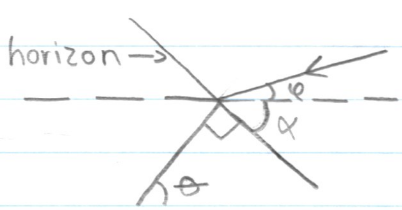
qui est l'angle recherché

(d)



Comme l'angle entre l'horizon et les rayons du soleil est de 90°, le soleil est vertical à midi au tropique du cancer lors du solstice d'été.

(e) Comme l'axe de la Terre forme un angle de 23,5° avec la normale à l'écliptique, on sait que l'angle entre l'équateur et les rayons du soleil varie entre −23,5° et 23,5° au cours de l'année. Soit θ la latitude



Pour que le soleil soit vertical, on veut que $\alpha + \varphi = 90^\circ$. Comme $\alpha = 90^\circ - \theta$, on a

$$90 - \theta + \varphi = 90^\circ$$

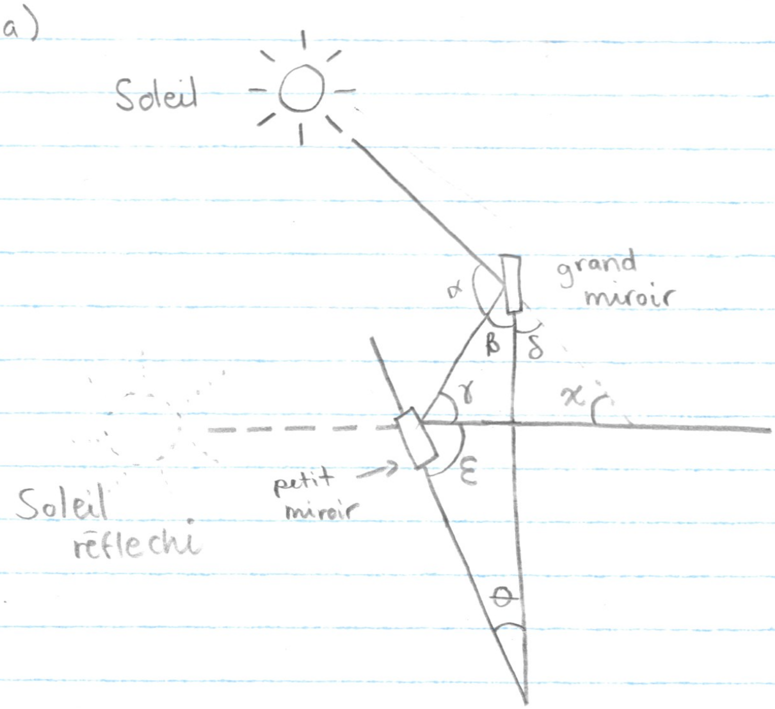
$$\Leftrightarrow \quad \theta = \varphi$$

Comme $-23{,}5^\circ \leq \varphi \leq 23{,}5^\circ$, alors $-23{,}5^\circ \leq \theta \leq 23{,}5^\circ$.

Donc tous les points sur Terre entre $-23{,}5^\circ$ et $23{,}5^\circ$ degrés de latitude sont tels qu'au moins un jour par an, le soleil est vertical à midi.

Exercice 18.

(a)



$$\varepsilon = 180 - 90 - \theta = 90 - \theta$$

$$\gamma = 180 - 2\varepsilon = 180 - 2(90 - \theta) = 2\theta$$

$$\beta = 180 - 90 - \gamma = 180 - 90 - 2\theta = 90 - 2\theta$$

$$\alpha = 180 - 2\beta = 180 - 2(90 - 2\theta) = 4\theta$$

$$\delta = 180 - \alpha - \beta = 180 - 4\theta - 90 + 2\theta = 90 - 2\theta$$

$$x = 180 - 90 - \delta = 90 - 90 + 2\theta = 2\theta$$