TP5 14 février 2025

Section 15.5

Exercice 20: On peut aussi définir le diagramme de Voronoï d'un ensemble de sites dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Proposer une définition et un équivalent des propositions 15.16 et 15.17 pour ce cas.

Solution:

Définition: Soit $S = \{P_1, \dots, P_n\}$ un ensemble de points distincts d'une région $D \subset \mathbb{R}^3$. Les points P_i sont appelés sites.

1. Pour chaque site P_i, la cellule de Voronoï de P_i, notée $V(P_i)$, est donnée par

$$V(P_i) = \{ Q \in D : d(P_i, Q) \leq d(P_j, Q) \quad \forall j \neq i \},$$

où d est la distance euclidienne en 3D:

$\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

2. Le diagramme de Voronoï de S, noté $V(S)$, est la

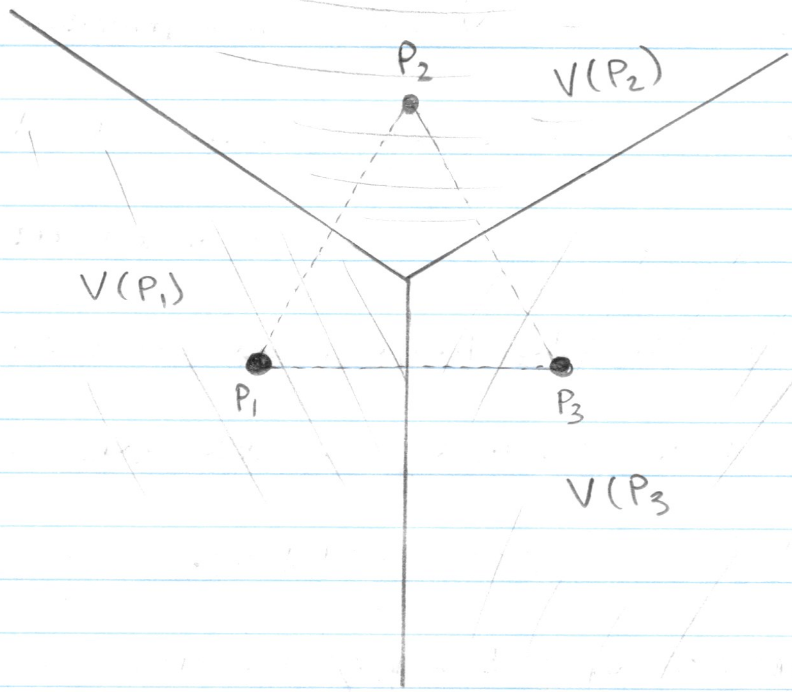
décomposition de D en cellules de Voronoï.

Proposition 15.16: Soient $P, Q \in \mathbb{R}^3$. Le plan médian du segment PQ est le lieu géométrique des points à égale distance de P et Q. C'est un plan $(\mathcal{P})$ qui a une normale parallèle au segment PQ. Tous les points R d'un côté de $\mathcal{P}$ satisfont à $d(P,R) < d(Q,R)$, et ceux de l'autre côté satisfont à $d(P,R) > d(Q,R)$.

Proposition 15.17: Étant donné un ensemble $S = \{P_1, \dots, P_n\}$ de sites, pour chaque paire de points (P_i, P_j), le plan médian du segment P_iP_j divise l'espace en deux demi-espaces $E_{i,j}$ et $E_{j,i}$, le premier contenant P_i et le second P_j. La cellule de Voronoï $V(P_i)$ d'un site P_i est l'intersection des demi-espaces $E_{i,j}$, où $j \neq i$.

Exercice 21: Donner le diagramme de Voronoï d'un ensemble de trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.

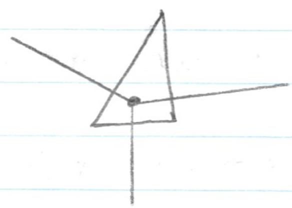
Solution:



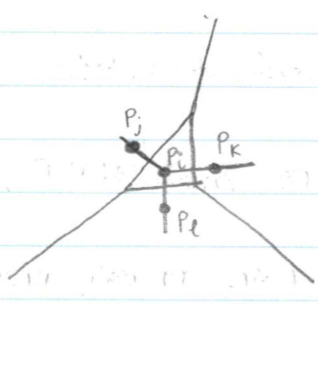
Exercice 22: Donner des conditions sur la position de quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 pour que le diagramme de Voronoï de l'ensemble $S = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ contienne une cellule triangulaire.

Solution: On dessine un triangle et on place un site à l'intérieur.

On trace trois droites perpendiculaires aux côtés du triangle passant par le site.



Pour que les côtés du triangles forment les côtés de la cellule de Voronoï du site placé à l'intérieur du triangle, il faut que les trois autres sites soient sur chacune des trois droites et que les côtés du triangles soient les médiatrices des segments reliant les trois sites à l'extérieur du triangle à celui à l'intérieur du triangle. On obtient



Ainsi, on veut qu'il existe $j \neq k \neq \ell \in \{1,2,3,4\}$ tels que P_j, P_k et P_ℓ sont les sommets d'un triangle contenant P_i, pour $i \in \{1,2,3,4\}$ et $i \neq j, k, \ell$.

Exercice 23: On se donne un polygone convexe à n côtés et un point P_1 à l'intérieur du polygône.

(a) Donner un algorithme pour ajouter n autres $P_2, \dots, P_{n+1}$, de telle sorte que le polygone devienne la seule cellule fermée du diagramme de voronoi de $S = \{P_1, \dots, P_{n+1}\}$.

(b) Donner un algorithme pour ajouter les n demi-droites qui complètent le diagramme de Voronoï.

Solution: Généralisation de l'algorithme présenté à l'exercice précédent.

Exercice 24: Définition triangulation de Delaunay: les sommets des triangles sont les sites de S,

et on trace le segment P_iP_j entre les sites P_i et P_j

si les cellules $V(P_i)$ et $V(P_j)$ ont une arrête commune.

(a) Vérifier que, si dans le diagramme de Voronoï, on a au plus trois arêtes passant par chaque sommet (ici, sommet est sommet d'une cellule), alors la construction précédente donne des triangles.

(b) Vérifier que chaque croisement P de trois arêtes dans le diagramme de Voronoï est le centre du cercle circonscrit à un triangle de la triangulation de Delaunay dont les sommets sont les sites des trois cellules du diagramme de Voronoï qui ont un sommet en P.

<u>Solution:</u> (a) Considérons $S = \{P_1, \ldots, P_n\}$, $V(P_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $V(S)$ le diagramme de Voronoï de S. Comme $V(P_i) \cap V(P_j)$, pour $i \neq j$, est une ligne ou l'ensemble vide, pour parler d'un sommet, il faut au

moins considérer l'intersection de trois cellules $V(P_i)$, $V(P_j)$ et $V(P_k)$, où i,j,k sont distincts.

Par hypothèse, on a qu'au plus trois arêtes par chaque sommet; donc tous les sommets des cellules de $V(S)$ sont définis par l'intersection de trois cellules. Soit P un sommet d'une cellule de $V(S)$. On sait que $P = V(P_i) \cap V(P_j) \cap V(P_k)$ pour $i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$ distincts, on a donc $V(P_i) \cap V(P_j) \neq \emptyset$, $V(P_j) \cap V(P_k) \neq \emptyset$ et $V(P_k) \cap V(P_i) \neq \emptyset$.

On trace donc les segments P_iP_j, P_jP_k et P_kP_i qui forment un triangle contenant le sommet P.

Comme c'est vrai pour tous les sommets, la triangulation de Delaunay de $V(S)$ donne des triangles.

(b) Soit P le croisement de trois arêtes dans $V(S)$.

Par le (a), on sait que P est à l'intérieur d'un triangle de Delaunay. Posons P_i, P_j et P_k les sommets de ce triangle. P_i, P_j et P_k sont trois sites distincts, et on a que $V(P_i) \cap V(P_j) \cap V(P_k)$ $= P$ aussi par le (a).

Par définition, l'arête commune à $V(P_i)$ et $V(P_j)$ est la médiatrice du segment P_iP_j, l'arête commune de $V(P_j)$ et $V(P_k)$ est la médiatrice de P_jP_k, et l'arête commune de $V(P_k)$ et $V(P_i)$ est la médiatrice de P_kP_i.

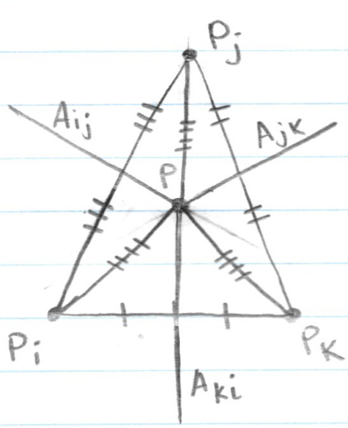
Ainsi, P est le point d'intersection des trois médiatrice d'un triangle. Posons

$A_{ij} = V(P_i) \cap V(P_j)$ l'arête commune de $V(P_i) \cap V(P_j)$

$A_{jk} = V(P_j) \cap V(P_k)$ l'arête commune de $V(P_j) \cap V(P_k)$

$A_{ki} = V(P_k) \cap V(P_i)$ l'arête commune de $V(P_k) \cap V(P_i)$

On a donc que $|PP_i| = |PP_j| = |PP_k|$.



Ainsi, on a bien que P est le centre du cercle circonscrit à un triangle dont les sommet sont les sites des trois cellules ayant un sommet en P.

Exercice 25 : Mettre en évidence un ensemble de sites S dont la figure 15.28 est le diagramme de Voronoï et donner la triangulation de Delaunay.

Solution :