Exercice 22 : On projette la sphère sur le cylindre infini vertical en passant par le centre de la sphère.

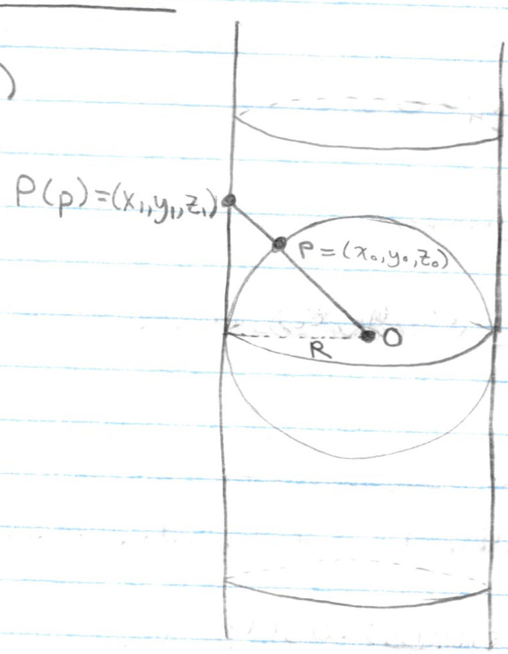
(a) Donner la formule de la projection

(b) Quelle est l'image des méridiens ? Des parallèles ?

(c) Quelle est l'image d'un grand cercle ?

Solution :

(a)



On cherche la fonction $P : S^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\} \to S^1 \times \mathbb{R}$ qui associe chaque point de la sphère (sauf les pôles) à un point du cylindre.

Considérons le point $p = (x_0, y_0, z_0)$ de la sphère qui est envoyé vers le point $P(p) = (x_1, y_1, z_1)$ du cylindre. Ainsi, on a $(x_1, y_1, z_1) = t(x_0, y_0, z_0)$ pour un certain $t > 0$. De plus, comme la sphère est de rayon R, on a que $x_1^2 + y_1^2 = R^2$. On obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x_1 = t x_0 \\ y_1 = t y_0 \\ z_1 = t z_0 \\ x_1^2 + y_1^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow (t x_0)^2 + (t y_0)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{R^2}{x_0^2 + y_0^2}$$

$$\Rightarrow t = \frac{\pm R}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

On choisit $t > 0$.

$$\Rightarrow P(p) = P(x_0, y_0, z_0)$$

$$= \frac{R}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} (x_0, y_0, z_0)$$

On passe aux coordonnées sphériques :

On a $x_0 = R\cos(\theta)\cos(\varphi)$
$y_0 = R\sin(\theta)\cos(\varphi)$
$z = R\sin(\varphi)$

où θ est la longitude de p et φ la latitude de p.

Ainsi, on obtient

$$P(p) = \frac{R}{\sqrt{R^2\cos^2(\theta)\cos^2(\varphi) + R^2\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)}} (R\cos(\theta)\cos(\varphi), R\sin(\theta)\cos(\varphi), R\sin(\varphi))$$

$$= \frac{R^2}{\sqrt{R^2\cos^2(\varphi)(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} (\cos(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

$$= \frac{R^2}{|R\cos(\varphi)|}(\cos(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

$$= R(\cos(\theta), \sin(\theta), \tan(\varphi)), \text{ car } |R\cos(\varphi)| = R\cos(\varphi) \text{ car } R, \cos(\varphi) > 0$$

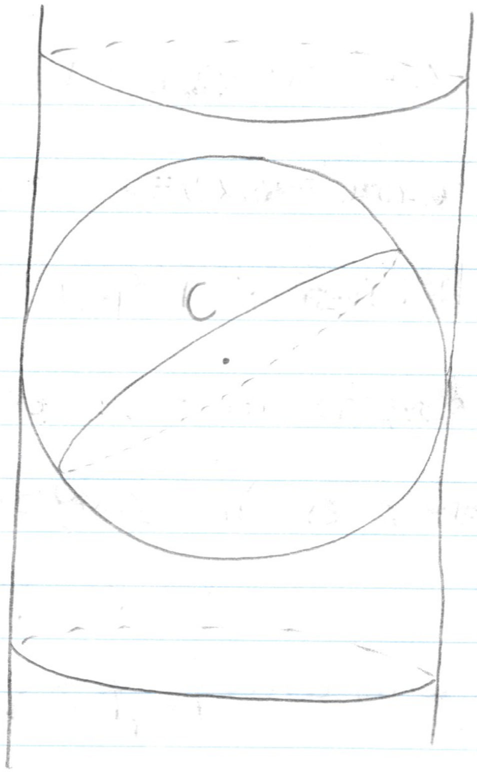
(b) Pour les méridiens, la longitude est constante, disons θ_0. La latitude φ varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, exclusivement, donc $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

Comme $\lim_{\varphi \to -\frac{\pi}{2}} \tan(\varphi) = -\infty$ et $\lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} \tan(\varphi) = \infty$, on a que l'image d'un méridien est une droite verticale infinie.

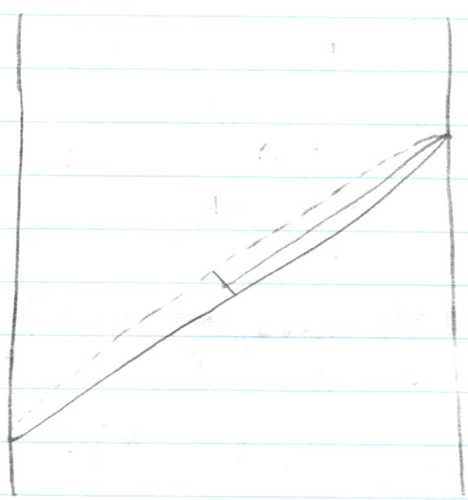
Pour les parallèles, la longitude varie entre 0 et 2π inclusivement, donc $0 \leq \theta \leq 2\pi$. La latitude est constante, disons φ_0.

Ainsi, l'image d'un parallèle est un cercle de rayon R.

(c) Considérons un grand cercle C qui ne passe pas par les pôles et qui n'est pas l'équateur.



Lorsqu'on projette C sur le cylindre, on obtient une ellipse, car c'est l'intersection



d'un plan (pas le plan de l'équateur) et du cylindre.

Faire une rotation du cylindre