

Exercice 6: Vérifier que les égalités

$$\cdot |\neg P_1| = \text{cosgn}(p_1)$$

$$\cdot |P_1 \vee P_2| = \text{sgn}(p_1 + p_2)$$

$$\cdot |P_1 \wedge P_2| = p_1 * p_2$$

correspondent bien aux fonctions valeurs
des opérateurs ET, OU et NON.

Sol: Pour $\text{cosgn}(p_1)$, on a

p_1	$\text{cosgn}(p_1)$
0	1
1	0

$$\Rightarrow \text{cosgn}(p_1) = |\neg p_1|$$

Pour $\text{sgn}(p_1 + p_2)$, on a

$\text{sgn}(p_1 + p_2)$	$p_1 = 0$	$p_1 = 1$
$p_2 = 0$	0	1
$p_2 = 1$	1	1

$$\Rightarrow \text{sgn}(p_1 + p_2) = |p_1 \vee p_2|$$

Pour $p_1 * p_2$, on a

$p_1 * p_2$	$p_1 = 0$	$p_1 = 1$
$p_2 = 0$	0	0
$p_2 = 1$	0	1

$$\Rightarrow p_1 * p_2 = |p_1 \wedge p_2|$$

Section 13.7

Rappel: Une fonction est primitive récursive si elle peut être obtenue de la fonction successeur, de la fonction zéro et des fonctions projection, par l'application d'un nombre fini de compositions et de récurrences.

Rappel: Soient $g_1, g_2, \dots, g_k$ des fonctions arithmétiques de n variables et h une fonction arithmétique de k variables. $f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$ est la composition de h et de $g_1, g_2, \dots, g_k$, notée $f = h \circ (g_1, \dots, g_k)$

Rappel: Soient g et h des fonctions arithmétiques totales de n et $n+2$ variables respectivement. La fonction f de $n+1$ variables définie par

$$1. f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n)$$

$$2. f(x_1, \dots, x_n, y+1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y))$$

est appelée récurrence de base g et de pas h .

On permet $n=0$ avec la convention qu'une fonction de zéro variable est une constante.

Exercice 11: Montrer que les fonctions sgn et cosgn définies comme suit

$$\begin{cases} \text{sgn}(0) = 0 \\ \text{sgn}(y+1) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{cosgn}(0) = 1 \\ \text{cosgn}(y+1) = 0 \end{cases}$$

Sol: Pour sgn , on peut prendre $\begin{cases} \text{sgn}(0) = z(0) = 0 \\ \text{sgn}(y) = s(z(y)) = 1 \end{cases}$

Pour cosgn , on peut prendre $\begin{cases} \text{cosgn}(0) = s(z(0)) = 1 \\ \text{cosgn}(y) = z(y) = 0 \end{cases}$

Exercice 12: Montrer que la fonction

$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ donnée par $f(m, n) = mn + 3n^2 + 1$

est primitive réursive.

Sol: Pour obtenir le terme mn , on utilise $\text{mult}(m, n)$ qui est primitive réursive.

Pour obtenir le terme $3n^2$, on utilise $\text{mult}(3, n^2)$ qui est primitive réursive.

Pour obtenir 3, on utilise $s(s(s(z(m))))$

qui est primitive réursive.

Pour obtenir n^2 , on utilise $\text{mult}(n,n)$ qui est primitive réursive.

Pour obtenir le terme 1, on utilise $s(z(m))$ qui est primitive réursive.

Ainsi, on a que f est une composition finie de fonctions primitives réursives, elle est donc primitive réursive. On a

$$f(m,n) = \text{add}(\text{mult}(m,n), \text{add}(\text{mult}(s(s(s(z(m))))), \text{mult}(n,n)), s(z(m))))$$

Rappel: Une fonction est réursive si elle peut-être obtenue par un nombre fini de compositions, de récurrences et de minimalisations à partir des fonctions successeur, zéro et projection.

Rappel: Soient P un prédicat de $(n+1)$ variables et

$\rho = |P|$ sa fonction valeur associée. L'expression

$\mu z [\rho(x_1, x_2, \dots, x_n, z)]$ représente le plus petit nombre

naturel z , s'il existe, tel que $p(x_1, \dots, x_n, z) = 1$,

c-à-d tel que $P(x_1, \dots, x_n, z)$ soit vrai. Sinon,

l'expression n'est pas définie. Cette construction

s'appelle la minimalisation de p , et μz est

appelé l'opérateur μ .

Exercice 13: Montrer que les fonctions suivantes

sont récurrentes.

(a) $\text{abs}(x, y) = |x - y|$

(b) $\text{max}(x, y) = \begin{cases} x, & x \geq y \\ y, & x < y \end{cases}$

Sol: (a) On a $\text{abs}(x, y) = \text{add}(\text{sous}(x, y), \text{sous}(p_2(x, y), p_1(x, y)))$

$\Rightarrow \text{abs}$ est primitive récurrente

$\Rightarrow \text{abs}$ est récurrente

(b) On a $\text{max}(x, y) = \text{add}(\text{sous}(x, y), x)$

$\Rightarrow \text{max}$ est primitive récurrente

$\Rightarrow \text{max}$ est récurrente

Exercice 14: Montrer que, si g est une fonction primitive

récursive de $n+1$ variables, alors

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = \sum_{i=0}^y g(x_1, \dots, x_n, i)$$

Sol: On a $f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n, 0)$

$$f(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0) + g(x_1, \dots, x_n, 1)$$

$$= f(x_1, \dots, x_n, 0) + g(x_1, \dots, x_n, 1)$$

$$f(x_1, \dots, x_n, 2) = g(x_1, \dots, x_n, 0) + g(x_1, \dots, x_n, 1)$$

$$+ g(x_1, \dots, x_n, 2)$$

$$= f(x_1, \dots, x_n, 1) + g(x_1, \dots, x_n, 2)$$

On peut donc définir f récursivement par

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n, 0) \\ f(x_1, \dots, x_n, y+1) = \text{add}(f(x_1, \dots, x_n, y), g(x_1, \dots, x_n, y+1)) \end{cases}$$

Exercice 8: Construire une machine de Turing qui

intervertit deux nombre sur le ruban : si $B \bar{x} B \bar{y} B$

est la configuration initiale, alors la machine

s'arrêtera sur $B \bar{y} B \bar{x} B$. Notons qu'il n'est pas nécessaire

que le B à gauche soit le premier sur le ruban.

Sol: On peut prendre $M = (Q, X, \varphi)$, où $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_{20}\}$,

$X = \{B, 1, 0\}$ et φ est définie par

