

Exercice 8: Le registre de l'exercice 7 génère une suite $\{a_n\}$.

(a) Donner la fonction qui   a_n associe a_{n+2} .

Sol (a): On a $(q_0, q_1, q_2, q_3, q_4) = (1, 0, 1, 0, 0)$

et $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 0, 0, 1)$

On a donc la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4$

On a $x_{n+2} = A^2 x_n$, où $x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ a_{n+4} \end{pmatrix}$

et $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X_{n+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ a_{n+4} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ a_{n+4} \\ a_{n+5} \\ a_{n+6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ a_{n+4} \\ a_n + a_{n+2} \\ a_{n+1} + a_{n+3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{n+5} = a_n + a_{n+2}$$

$$\Leftrightarrow a_n = a_{n+2} + a_{n+5}$$

(b) Donner la fonction qui à a_n associe a_{n+10} .

Sol (b): Par le (a), on a que

$$a_{n+5} = a_{n+7} + a_{n+10}$$

$$\Rightarrow a_n = a_{n+2} + a_{n+5}$$

$$= a_{n+2} + a_{n+7} + a_{n+10}$$

Exercice 10: (b) Montrer que $Q(x) = x^4 - x - 1$ est primitif

sur $\mathbb{F}_2$, c-à-d que $x^k \neq 1$ si $k < 80$.

Indice: En utilisant le fait que $x^{80} = 1$ et

le lemme 8.2 qui garantit que si $x^k = 1$ pour $k < 80$, alors $k \mid 80$. Ceci permet de se limiter à calculer x^k pour $k \mid 80$.

Sol(b): Comme nous sommes dans $\mathbb{F}_2$, on a

$$\text{que } Q(x) = x^4 - x - 1 = x^4 + x + 1.$$

$$\text{On a que } Q(x) = 0 \iff x^4 = x + 1$$

Les diviseurs de 80 sont 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40

et 80. On sait déjà que $x^1, x^2, x^4 \neq Q(x)$, car sinon on a que $x = 0$.

$$\text{On a } x^5 = x \cdot x^4 = x(x+1) = x^2 + x$$

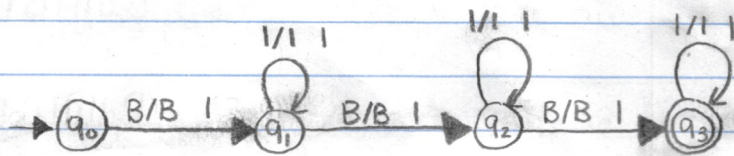
$$x^8 = x^4 \cdot x^4 = (x+1)(x+1) = x^2 + 1$$

$$x^{10} = x^5 \cdot x^5 = (x^2 + x)(x^2 + x) = x^4 + x^2 = x + 1 + x^2$$

$$x^{16} = x^8 \cdot x^8 = (x^2 + 1)(x^2 + 1) = x^4 + 1 = x + 1 + 1 = x$$

$$\begin{aligned} x^{20} &= x^{10} \cdot x^{10} = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1) = x^4 + x^3 + x^2 + x^3 + x^2 \\ &\quad + x + x^2 + x + 1 \\ &= x^4 + x^2 + 1 \\ &= x + 1 + x^2 + 1 \\ &= x^2 + x \end{aligned}$$

$$x^{40} = x^{20} \cdot x^{20} = (x^2 + x)(x^2 + x) = x^4 + x^2 = x + 1 + x^2$$

Section 13.7Exercice 1: Soit

représentant la fonction φ d'une machine de Turing M et l'entrée $B \text{ I I I I I B I I I I I B I I I I I B I I B}$. Le pointeur se trouve sur le B le plus à gauche au départ. Décrire l'action de la machine et préciser quelle est la position du pointeur à la fin du calcul.

Sol: On a $q_0 B \text{ I I I I I B I I I I I B I I I I I B I I B}$

$B q_1 \text{ I I I I I B I I I I I B I I I I I B I I B}$

$B \text{ I } q_1 \text{ I I I I I B I I I I I B I I I I I B I I B}$

$B \text{ I I } q_1 \text{ I I I I I B I I I I I B I I I I I B I I B}$

$B \text{ I I I I I } q_1 B \text{ I I I I I B I I I I I B I I B}$

$B \text{ I I I I I B } q_2 \text{ I I I I I B I I I I I B I I B}$

$B \text{ I I I I I B I } q_2 \text{ I I I I I B I I I I I B I I B}$

B||||B||||q₂B||||B||B

B||||B||||Bq₃||||B||B

B||||B||||B|q₃||||B||B

B||||B||||B|q₃B||B

On arrête ici car il n'y a pas d'instruction lorsque le pointeur est en état q_3 et qu'il rencontre un B, i.e., $\ell(q_3, B)$ n'est pas défini.

Exercice 2: (a) Construire une machine de Turing

permettant de recopier un nombre unaire à sa suite en laissant un blanc entre les deux (l'entrée $B\bar{x}B$ et la sortie $B\bar{x}B\bar{x}B$). Ne pas oublier de ramener le pointeur avant le premier nombre.

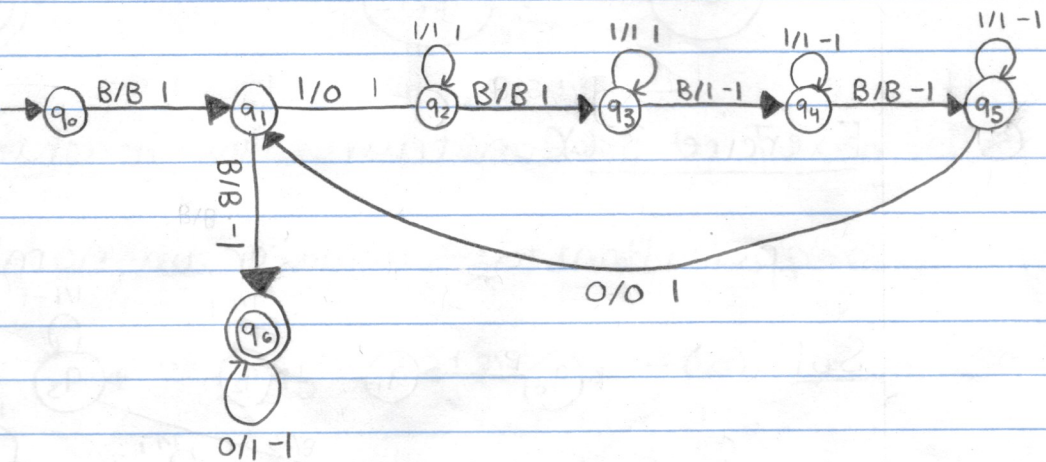
(b) Construire une machine de Turing permettant de copier k fois un nombre unaire, les k copies du nombre étant séparées par

des blancs. Utiliser l'induction.

Sol: (a) On peut prendre $M = (Q, X, \psi)$, où

$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_6\}$, $X = \{B, 0, 1\}$ et ψ est définie

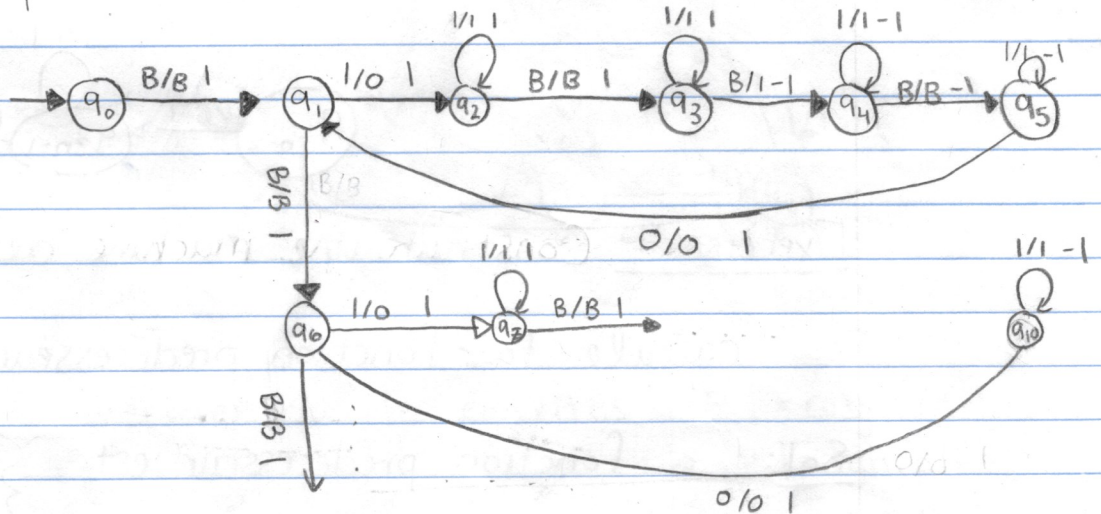
par



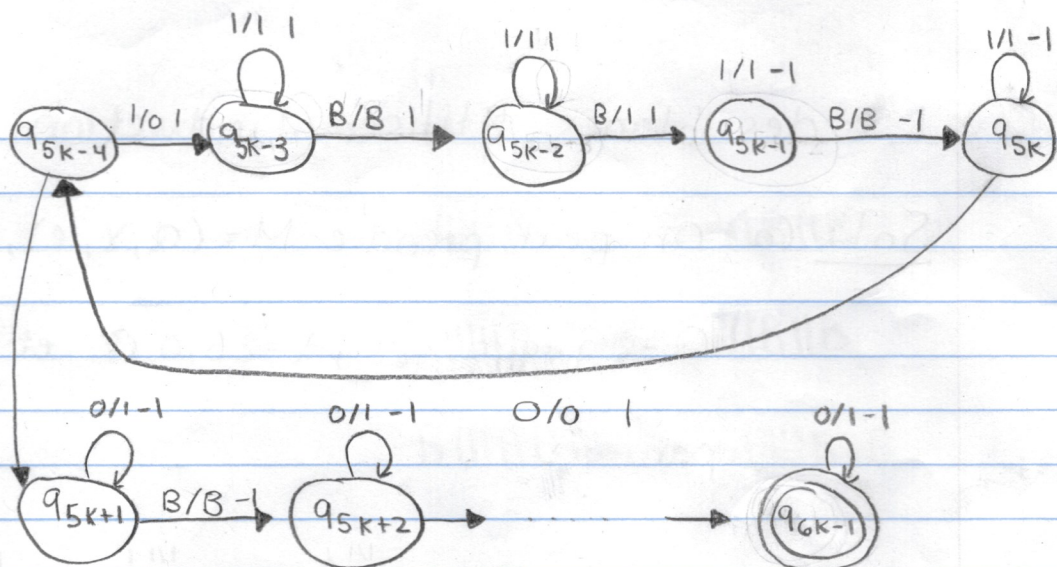
(b) Pour $k \in \mathbb{N}$, on peut prendre $M = (Q, X, \psi)$, où

$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_{6k+1}\}$, $X = \{B, 0, 1\}$ et ψ est définie

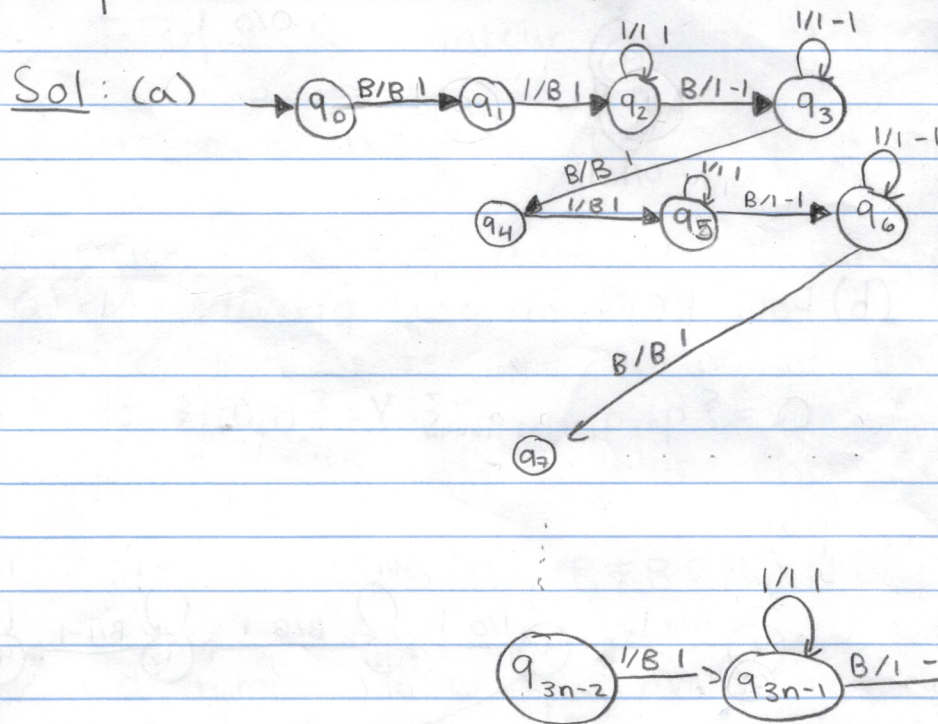
par



Suite au verso



Exercice 3: (a) Construire une machine de Turing permettant de traduire un nombre de n cases.



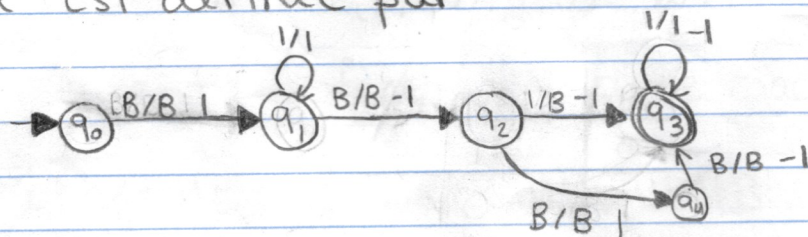
Exercice 4: Construire une machine de Turing qui calcule la fonction prédécesseur.

Sol: La fonction prédécesseur est $\begin{cases} \text{pred}(0) = 0 \\ \text{pred}(y+1) = y \end{cases}$

On peut prendre la machine de Turing

$M = (Q, X, \varphi)$, où $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_4\}$, $X = \{B, I\}$ et

φ est définie par



Exercice 5: Construire une machine de Turing effectuant

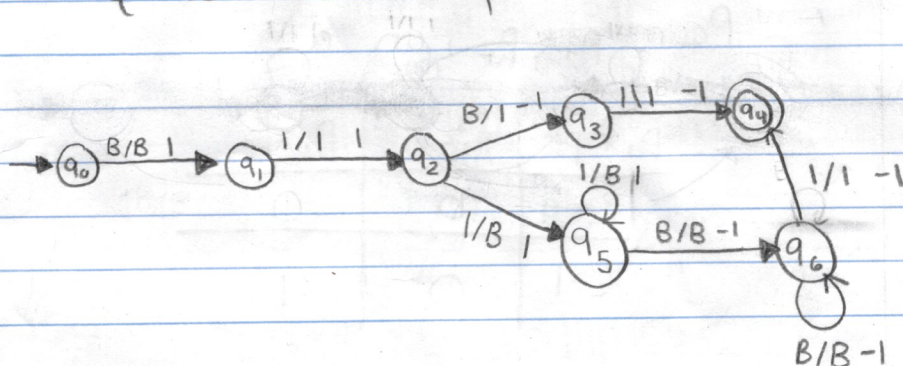
la fonction $\text{cosgn}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$\text{cosgn}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Sol: On peut prendre la machine de Turing

$M = (Q, X, \varphi)$, où $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_6\}$, $X = \{B, I\}$

et φ est définie par



Exercice 6: Vérifier que les égalités $\cdot | \neg P_1 | = \text{cosgn}(p_1)$

$$\cdot | P_1 \vee P_2 | = \text{sgn}(p_1 + p_2)$$

$$\cdot | P_1 \wedge P_2 | = p_1 * p_2$$

correspondent bien aux fonctions valeurs
des opérateurs ET, OU et NON.

Sol: Pour $\text{cosgn}(p_1)$, on a

p_1	$\text{cosgn}(p_1)$
0	1
1	0

$$\Rightarrow \text{cosgn}(p_1) = \neg p_1$$

Pour $\text{sgn}(p_1 + p_2)$, on a

$\text{sgn}(p_1 + p_2)$	$p_1 = 0$	$p_1 = 1$
$p_2 = 0$	0	1
$p_2 = 1$	1	1

$$\Rightarrow \text{sgn}(p_1 + p_2) = |p_1 \vee p_2|$$

Pour $p_1 * p_2$, on a

$p_1 * p_2$	$p_1 = 0$	$p_1 = 1$
$p_2 = 0$	0	0
$p_2 = 1$	0	1

$$\Rightarrow p_1 * p_2 = |p_1 \wedge p_2|$$