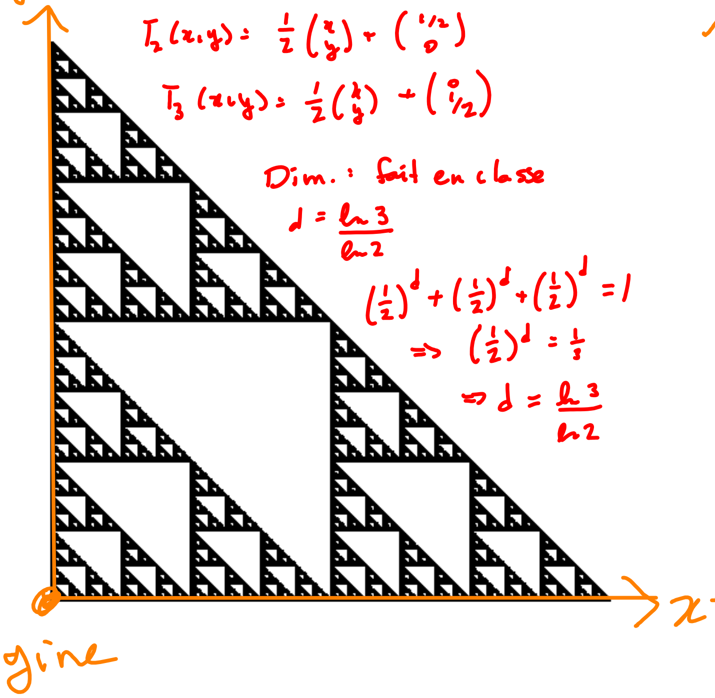
$$T_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T_2(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_3(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$



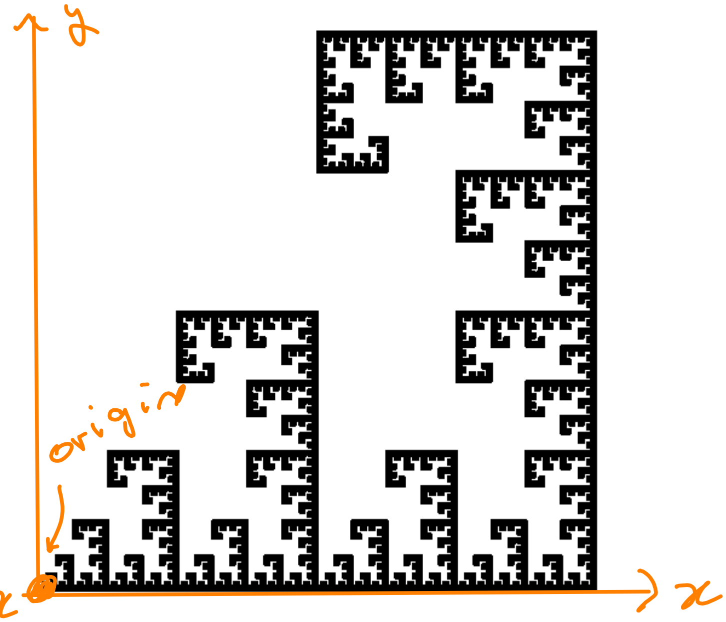
Dim. : fait en classe

$$d = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^d + \left(\tfrac{1}{2}\right)^d + \left(\tfrac{1}{2}\right)^d = 1$$

$$\Rightarrow \left(\tfrac{1}{2}\right)^d = \tfrac{1}{3}$$

$$\Rightarrow d = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$



$$T_1(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T_2(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_3(x,y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}(90)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

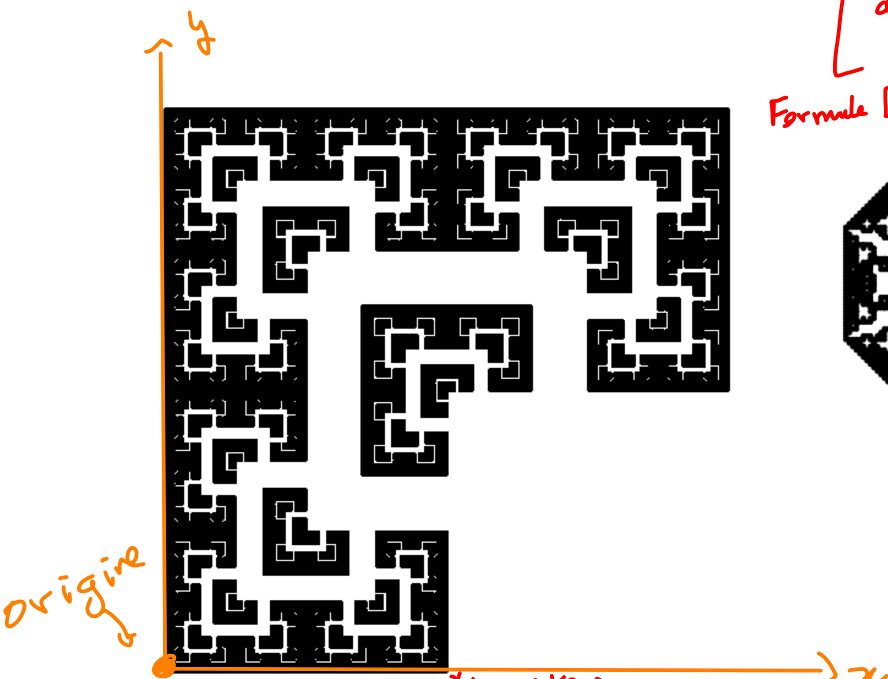
Carrés

$$N(1) = 1 \qquad N\left(\tfrac{1}{4}\right) = 9 \qquad \dots \quad N\left(\tfrac{1}{2^n}\right) = 3^n$$

$$N\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3 \qquad N\left(\tfrac{1}{8}\right) = 27$$

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(N(1/2^n))}{\log(1/2^n)} = \dots = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{\ln 2}{\ln 2}.$$

Formule $\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^d + \left(\tfrac{1}{2}\right)^d + \left(\tfrac{1}{2}\right)^d = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow d = \frac{\ln 3}{\ln 2}. \right]$

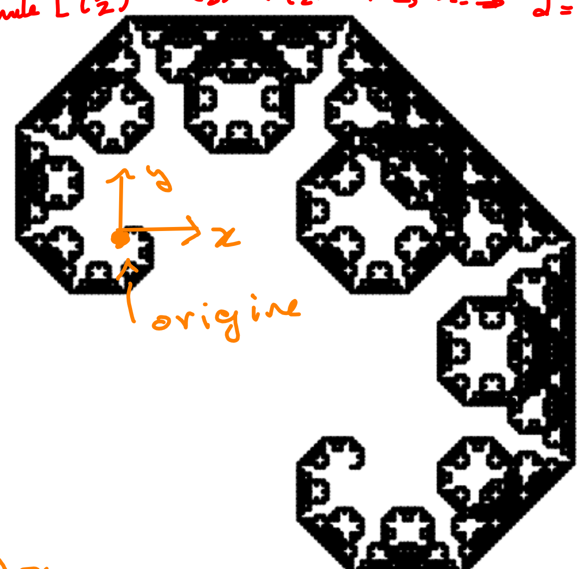


$$T_1(x,y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}(90)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

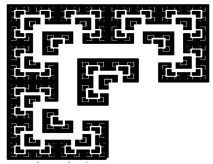
$$T_3(x,y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}(-90)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_4(x,y) = \frac{3}{10}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/20 \\ 7/20 \end{pmatrix}$$



$$T_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{rot}(45)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

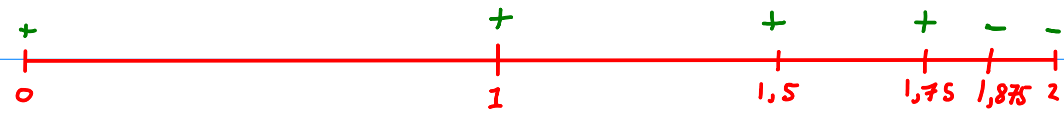
$$T_2(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{rot}(-45)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de dimension pour 

Résoudre $\left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{3}{10}\right)^d = 1$

On pose $f(d) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{3}{10}\right)^d - 1$. On cherche d tel que $f(d) = 0$.
(Il existe un unique zéro, car $f(0) > 0$, $f(2) < 0$ et f est strict. déc.)

Méthode de bissection :



$f(0) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{3}{10}\right)^0 - 1 = 3 + 1 - 1 = 3$ +

$f(2) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 - 1 = -0,16$ −

→ On prend le point milieu entre 0 et 2 :
$f(1) = 3\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{10} - 1 = \frac{15 + 3 - 10}{10} = \frac{8}{10} = 0,8$ +

→ on prend le point milieu entre 1 et 2 :
$f(1,5) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{1,5} + \left(\frac{3}{10}\right)^{1,5} - 1 \approx 0,22$ +

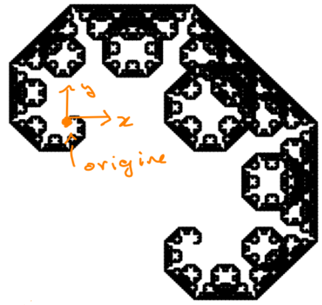
→ on prend le pt milieu entre 1,5 et 2 : $\frac{1,5 + 2}{2} = 1,75$
$f(1,75) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{1,75} + \left(\frac{3}{10}\right)^{1,75} - 1 \approx 0,0135$ +

→ on prend le pt milieu entre 1,75 et 2 : $\frac{1,75 + 2}{2} = 1,875$
$f(1,875) = \dots \approx -0,0775$ −

→ on prend le pt milieu entre 1,75 et 1,875 : $\frac{1,75 + 1,875}{2} = 1,8125$
$f(1,8125) \approx -0,033$ −

En continuant ainsi, on convergerait vers la sol. On sait donc que
$1,75 < d < 1,8125$, donc $d \approx 1,78$.

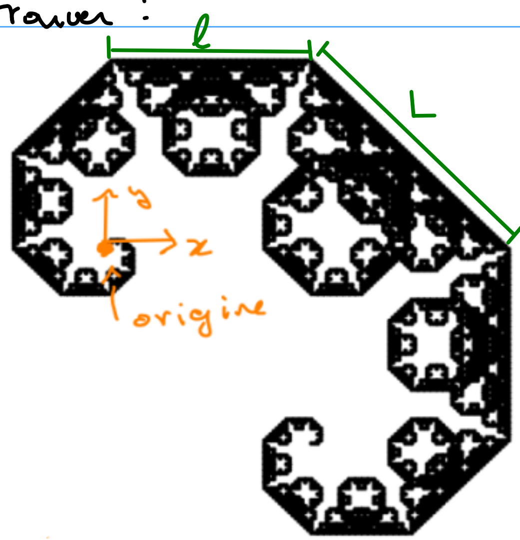
Remarque complémentaire sur



Le vrai rapport de contraction est $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

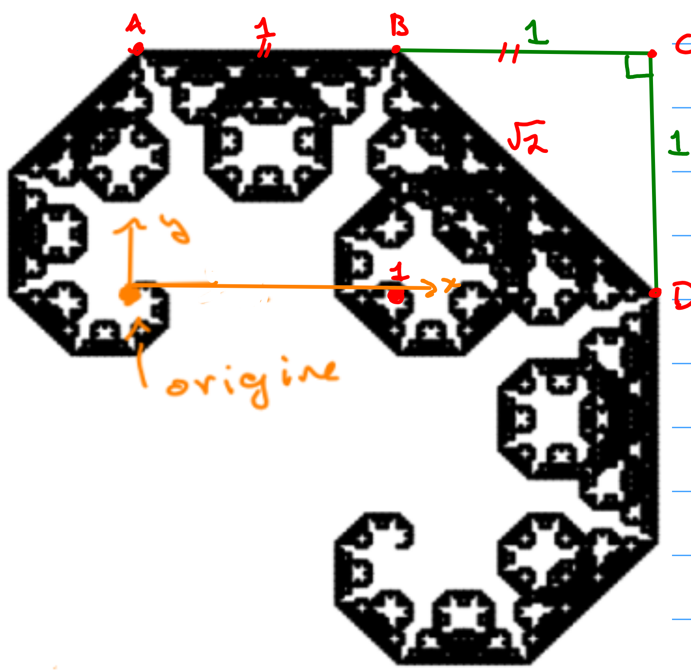
Il y a deux options pour le trouver :

1. Approximer avec une règle



$r = \frac{l}{L}$ où l et L sont mesurées à la règle.

2. (Sol. d'un étudiant)



→ La longueur du segment AB = trans. à droite (disons 1).

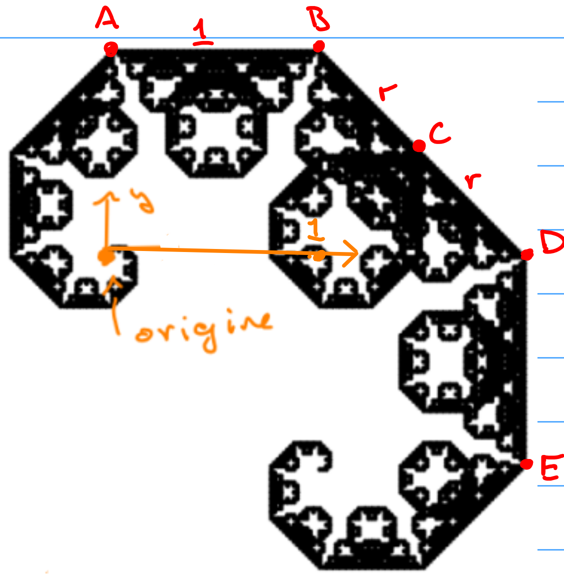
→ Il faut faire l'hypothèse qu'il y a un triangle rect. (en vert) avec les catètes de longueur 1.

→ Alors le segment BD a longueur $\sqrt{2}$.

→ T_1 envoie BD sur AB, donc

$$r\sqrt{2} = 1 \Rightarrow r = 1/\sqrt{2}$$

2' (sans faire l'hypothèse du triangle)



→ On fait une trans de, disons, 1 vers la droite.

⇒ long(AB) = 1.

→ $T_1(BD) = AB$

⇒ Long(AB) = r Long(BD)

→ $T_2(BD) = DE$

⇒ Long(DE) = r Long(BD)

⇒ long(DE) = Long(AB) = 1

→ $BD = \underbrace{T_1(DE)}_{\to BC} \cup \underbrace{T_2(AB)}_{\to CD}$

⇒ Long(BD) = Long(BC) + Long(CD)

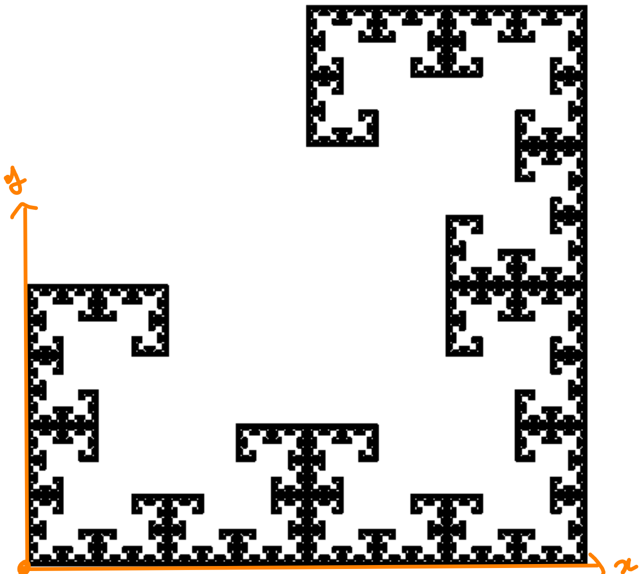
= r + r = 2r

Donc Long(AB) = r long(BD)

$1 = r(2r)$

$1 = 2r^2$

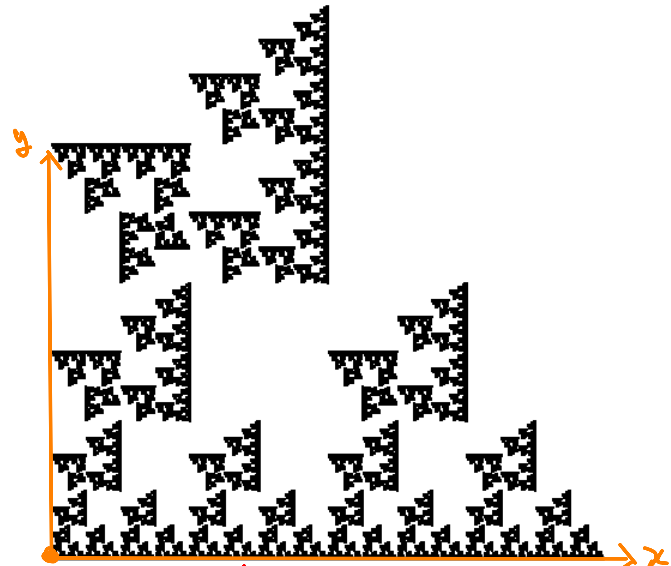
$r = \frac{1}{\sqrt{2}}$



$$T_1(x,y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}(90)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$T_2(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

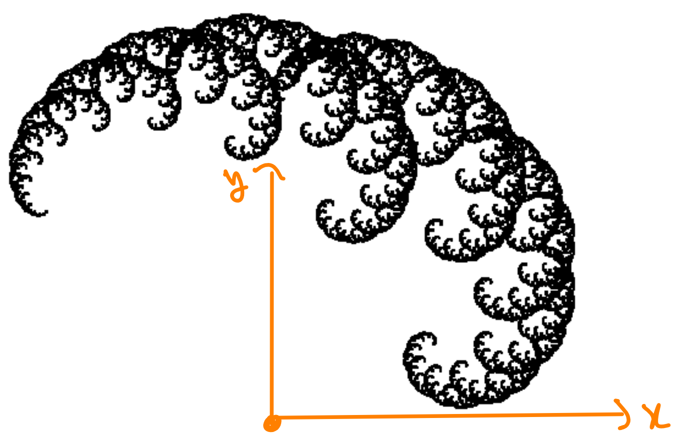
$$T_3(x,y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}(90)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$



$$T_1(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T_2(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}(90)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$



$$T_1 = \frac{7}{10}\,\mathrm{rot}(20)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \frac{7}{10}\,\mathrm{rot}(-40)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{rot}(45)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{rot}(135)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}\,\mathrm{rot}(45)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \frac{\sqrt{2}}{6}\,\mathrm{rot}(-45)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

$$T_4 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$