Sec 12.

#2. $[A_{00}]_B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, [A_{01}]_B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, [A_{10}]_B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$[A_{11}]_B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

orthogonaux?

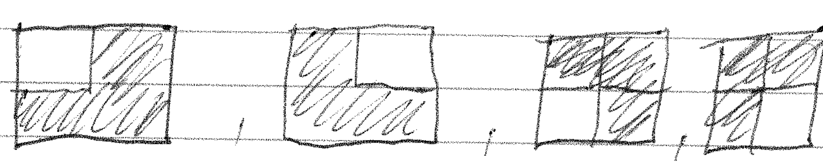
$\langle A_{00}, A_{01} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}) = 0$ ✓

Les autres se vérifient analoguement.

norme 1?

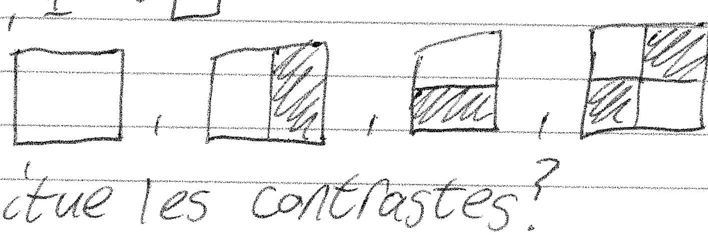
$\|A_{00}\|^2 = \langle A_{00}, A_{00} \rangle = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1$ ✓

Analoguement pour les autres.

b) base B: 

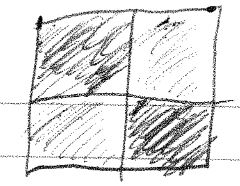
à quel point chacun des coins est foncé

$-1 \to$ , $1 \to$ 

base B': 

où se situe les contrastes?

$$[v]_B = \begin{pmatrix} -3/8 \\ 5/8 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Base } B}$$



Les contrastes sont dans les diagonales
Loon s'attend alors à une grosse 4^e composante
dans la base B' (et négative).

Calcul :

$$[v]_{B'} = P_{B' \leftarrow B} [v]_B$$

$$= P_{B \leftarrow B'}^{-1} [v]_B$$

$$= P_{B \leftarrow B'}^{T} [v]_B \to \text{car orthonormée, vu au a)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/8 \\ 5/8 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/8 \\ 0 \\ 1/8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

#3

De la page 390, avec $N=4$:

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{1/4} & \sqrt{1/4} & \sqrt{1/4} & \sqrt{1/4} \\ \sqrt{\frac{2}{4}}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 4}\right) & \sqrt{\frac{2}{4}}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) & \sqrt{\frac{2}{4}}\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) & \sqrt{\frac{2}{4}}\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) \\ \sqrt{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) & \sqrt{1/2}\cos\left(\frac{6\pi}{8}\right) & \sqrt{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{10\pi}{8}\right) & \sqrt{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{14\pi}{8}\right) \\ \sqrt{1/2}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) & \sqrt{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) & \sqrt{1/2}\cos\left(\frac{15\pi}{8}\right) & \sqrt{1/2}\cos\left(\frac{21\pi}{8}\right) \end{pmatrix}$$

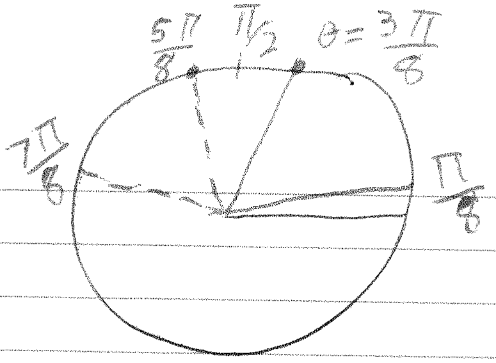
Commençons par la ligne #2 (3e ligne de la matrice)

- $\sqrt{1/2}\cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \sqrt{1/2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 1/2$.
- $\sqrt{1/2}\cos\left(\frac{6\pi}{8}\right) = \sqrt{1/2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1/2$
- $\sqrt{1/2}\cos\left(\frac{10\pi}{8}\right) = \sqrt{1/2}\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -1/2$
- $\sqrt{1/2}\cos\left(\frac{14\pi}{8}\right) = \sqrt{1/2}\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 1/2$

✓

maintenant, la ligne #1 (2^e ligne) :

- $\sqrt{1/2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \gamma$.
- $\sqrt{1/2}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \delta$



- $\sqrt{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(-\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) = -\delta.$
- $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = \quad -\gamma$ ✓

Puis, la dernière ligne:

- $\sqrt{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \delta.$
- $\sqrt{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\gamma$
- $\sqrt{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{15\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \gamma$
- $\sqrt{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{21}{8}\pi\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\delta.$ ✓

---

b) calculons $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$. avec l'identité

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$$

on sait que ce doit être positif.

$$\Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \cos\frac{\pi}{8} = +\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$$

Similairement, on calcul $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{4\sqrt{2}}}$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \ldots = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{4\sqrt{2}}}$$

on vérifie que la 2e ligne est bien de norme 1 :

$$\gamma^2 + \delta^2 + (-\delta)^2 + (-\gamma)^2$$

$$= 2\gamma^2 + 2\delta^2 = 2\left(\frac{\sqrt{2}+1}{4\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{4\sqrt{2}}\right)$$

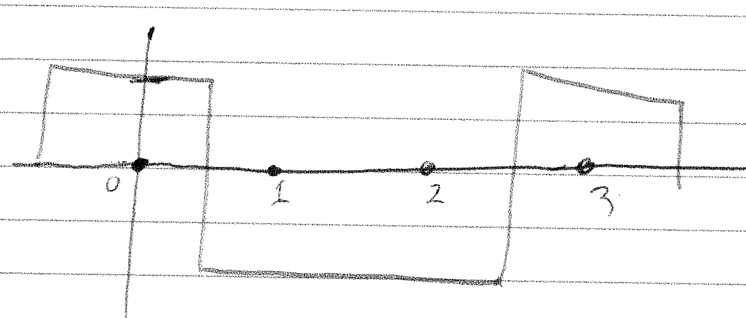
$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}+1-1}{2\sqrt{2}} = 1 \checkmark$$

#4

a) $(c_2)_i \to$ la ligne #2 (3^e ligne) de la matrice C (vu au #3).

$(c_2)_i = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
$\quad\quad\; 0 \quad\; 1 \quad\; 2 \quad 3$

Sous forme d'histogramme:

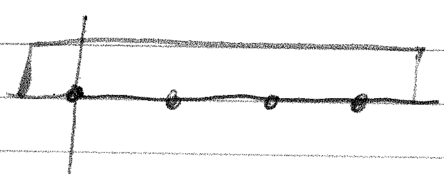


b) g est une combinaison linéaire des c_k:

$$g_i = \sum_{k=0}^{3} \beta_k (c_k)_i.$$

Regardons les histogrammes de la base c_k:

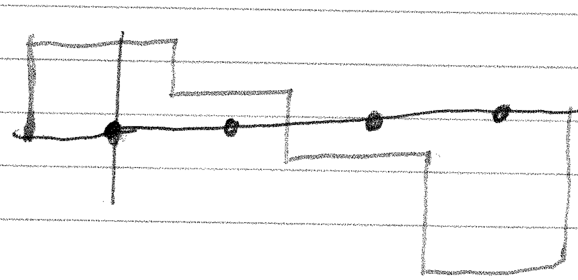
$c_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$



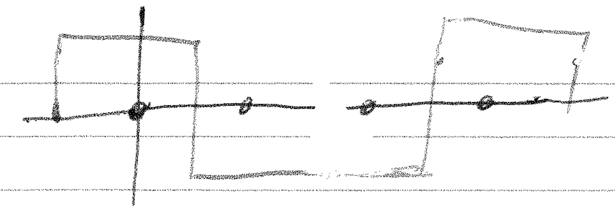
$c_1 = (\gamma, \delta, -\delta, -\gamma)$

$\gamma \approx 0{,}65$

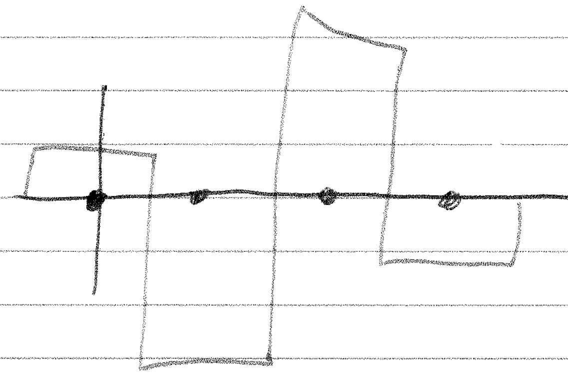
$\delta \approx 0{,}27$



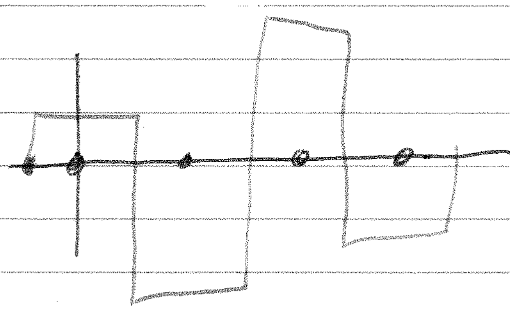
$c_2 = (1/2, -1/2, -1/2, 1/2)$



$c_3 = (\delta, -\gamma, \gamma, -\delta)$



et g :



Le plus grand β_k sera alors β_3, car c_3 est celui qui approxime le mieux g, et que les c_i est une base orthogonale.

H4P 0A1

#6

$$\alpha_{00} = \sum_{i=0}^{7} \sum_{j=0}^{7} c_{0i} c_{0j} f_{ij}$$ ⟶ formule p. 389.

$$c_{0i} = \frac{1}{\sqrt{8}} \cos(0) = \frac{1}{\sqrt{8}}, \quad c_{0j} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\Rightarrow \alpha_{00} = \sum_{i=0}^{7} \sum_{j=0}^{7} \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{1}{\sqrt{8}} f_{ij}$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{i=0}^{7} 8 \cdot f_{i0}$$

$$= \sum_{i=0}^{7} f_{i0} = 0 + 64 + 128 + 192 + 192 + 128 + 64 + \ldots$$

$$= 752.$$

b) En observant la base de transformation discrète (p. 393), on voit que la premièr[e] colonne donne les contrastes strictement horizontaux, ce dont est constitué notre élément. Puisque la base est orthogona[le], tous les éléments qui ne sont pas des contrastes horizontaux auront un coefficien[t] de 0.

#9.

L'algorithme a besoin de diviser l'image par bloc de 8. Si l'image n'a pas un nombre de colonnes (ou de lignes) divisible par 8, il en créera artificiellement jusqu'à avoir un nombre divisible par 8.
D'où il est mieux de rogner par tranche de 8.