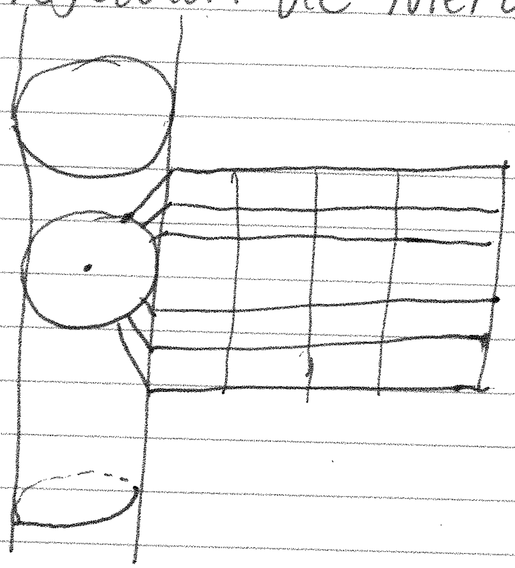
TP$_3$.

#20

Projection de Merator

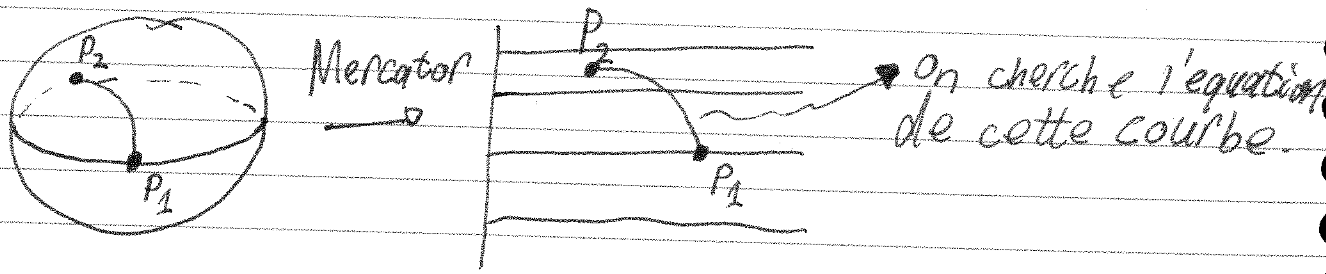


Si on est à une longitude θ et lattitude φ, alors le point sur la projection est donné par

$$N(\theta,\varphi)=\left(\theta, \ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)\right)$$

On cherche l'orthodromie entre $P_1 \to \theta=0°, \varphi=0°$

et $P_2 \to \theta=-90°, \varphi=60°$



$$\vec{OP_1}=(R,0,0)$$

$$\vec{OP_2}=(R\cos -90°\cos 60°, R\sin(-90°)\cos 60°, R\sin 60°)$$
$$=\left(0,-\frac{R}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)$$

L'orthodromie est obtenue avec l'intersection entre la sphère et le plan passant par l'origine et P_1, P_2.

Calculons le vecteur normal de ce plan:

$$\vec{n} = \overrightarrow{OP_1} \times \overrightarrow{OP_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}R \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \cdot 0 - \vec{j}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R^2\right) + \vec{k}\left(-\frac{R^2}{2}\right)$$

$$= \left(0, -R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{R^2}{2}\right).$$

L'équation du plan est alors:

$$0 \cdot (x-0) - R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(y-0) - \frac{R^2}{2}(z-0) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\,y + z = 0.$$

Pour se mettre sur la sphère (intersection entre la sphère et le plan), on ulise l'équation du plan et les coordonnées sphériques:

$$\sqrt{3} \cdot R \sin\theta \cos\varphi + R \sin\varphi = 0.$$

on peut isoler θ en fonction de φ:

$$\sin\theta = \frac{-\sin\varphi \cdot R}{\sqrt{3} R \cos\varphi} \Rightarrow \theta(\varphi) = \arcsin\left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \tan\varphi\right)$$

Dans notre cas, φ varie entre 0° et 60°: $\varphi \in [0°; 60°]$.

La courbe paramétrée par φ : $\begin{pmatrix} R\cos(\theta(\varphi))\cdot\cos\varphi \\ R\sin(\theta(\varphi))\cdot\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}$

décrit l'orthodromie sur la <u>sphère</u>.

Pour avoir l'équation sur la projection de Mercator, il faut projeter la courbe :

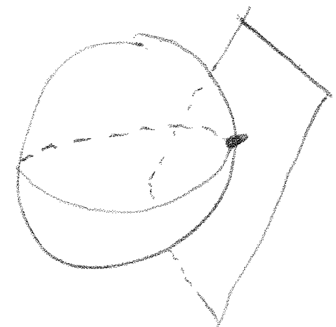
$$N(\theta(\varphi),\varphi) = \left(\theta(\varphi),\ \ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)\right)$$

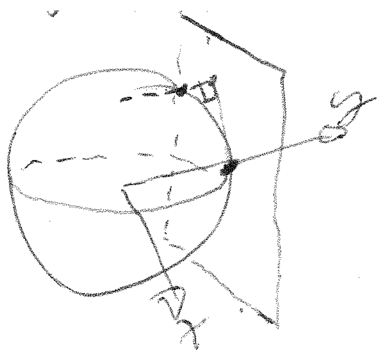
$$= \left(\arcsin\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\tan\varphi\right),\ \ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)\right)$$

avec $\varphi = [0°; 60°] = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

↳ en radian.

Exer A :-





soit $Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un pt. on cherche $f(Q) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ le resultat de la projection sur le plan.

cela doit passer par la droite ayant comme vecteur directeur le vecteur normal au plan et passant par Q :

$$d(t) = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+t \\ z \end{pmatrix}.$$

il s'agira alors de l'intersection entre la droite et le plan :

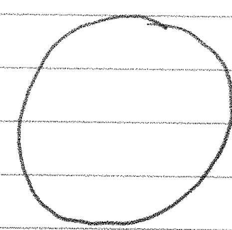
$$\begin{cases} d(t) = \begin{pmatrix} x \\ y+t \\ z \end{pmatrix} \\ z_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow y+t = 1 \Rightarrow t = 1-y.$$

Suite exer A.

on a alors $f(Q) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$.

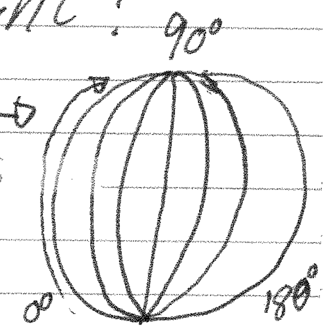
b) Pour chaque valeur de y, il y a deux points sur la sphère (la Terre). On peut alors seulement faire la projection avec la moitié de la Terre, soit pour les longitudes θ entre 0° et 180°.

L'image de la Terre sur la projection sera un disque



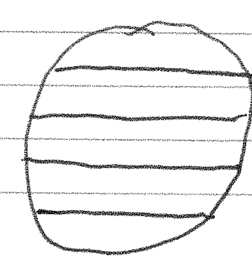
c) L'image des méridiens : θ constant :

$$f(Q) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \cos\varphi \\ 1 \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \longrightarrow$$ des arcs d'ellipse



d) L'image des parallèles : φ constant

$$f(Q) = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi_0 \\ 1 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$ droites parallèles



Sec 7.

#4.

a) $\varphi(n)$: la fonction d'Euler compte le nombre d'entiers dans $\{1, \ldots, n-1\}$ qui sont copremiers avec n.

Soit p premier.

on calcul $\varphi(p^2)$: le nombre de d'entiers copremiers avec p dans l'ensemple $\{1, 2, \ldots, p^2-1\}$.

Le nombre total de candidats : p^2-1.

Le nombre d'entiers n'étant pas copremiers avec p^2 : ce sera les multiples de «p» plus petit que p^2 :

$\{p, 2p, 3p, \ldots, (p-1)\cdot p, \cancel{p^2}\}$

il y en a $p-1$.

alors, $\varphi(p^2) = p^2-1 - (p-1) = p^2 - p$.

b).

b) oui, on pourrait utiliser $n=p^2$. Les étapes seraient les mêmes que pour $n=pq$, sauf que le calcul de $\varphi(n)$ est maintenant $\varphi(n)=\varphi(p^2)=p^2-p$.

Ce processus n'est pas utilisé car il est beaucoup moins sécuritaire que d'utiliser $n=pq$.

8. a)

MATHS

1) Remplace les lettres par leur nombre associé m.

$\downarrow m$

13 1 20 8 19

2) on calcul le nouveau nombre $x = 3m+4$

$\downarrow x = 3m+4$

43 7 64 28 61

3) on prend le mod 29

$\downarrow$ (mod 29)

14 7 6 28 3.

4) On prend les nouvelles lettres encodés.

$\downarrow$

« N G F ; C ».

b) On encode un message m par x avec la règle $x \equiv 3m+4 \pmod{29}$.

On voudrait un processus inverse qui permet de retrouver m à partir de x.

on va calculer

$$\begin{aligned} y &\equiv d \cdot x + b \pmod{29} \\ &\equiv d(3m+4) + b \pmod{29} \\ &\equiv d \cdot 3 \cdot m + 4d + b \pmod{m}. \end{aligned}$$

on cherche d et b où $d \cdot 3 \equiv 1 \pmod{29}$

et $4d + b \equiv 0 \pmod{29}$.

Trouver d par l'algorithme d'Euclide :

$29 = 9 \cdot 3 + 2$ (1)

$3 = 1 \cdot 2 + 1$ (2)

(1) $\Rightarrow 29 - 9 \cdot 3 = 2$

(2) $\Rightarrow 1 = 3 - 1 \cdot 2 = 3 - (29 - 9 \cdot 3) = 10 \cdot 3 - 29$

$\Rightarrow 10 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{29} \Rightarrow d = 10$

$\Rightarrow 4 \cdot 10 + b \equiv 0 \Rightarrow b \equiv -40 \pmod{29}$.

Pour décrypter, on utilisera alors

$y \equiv 10x - 40 \equiv 10(3m + 4) - 40 \equiv 30m + 40 - 40 \equiv m \pmod{29}$

c) « c o d e »

$\downarrow$

3 15 4 5

$\downarrow$ $y = 10x - 40$

-10 110 0 10

$\downarrow$ mod 29

19 23 0 10 $\longrightarrow$ S W □ J