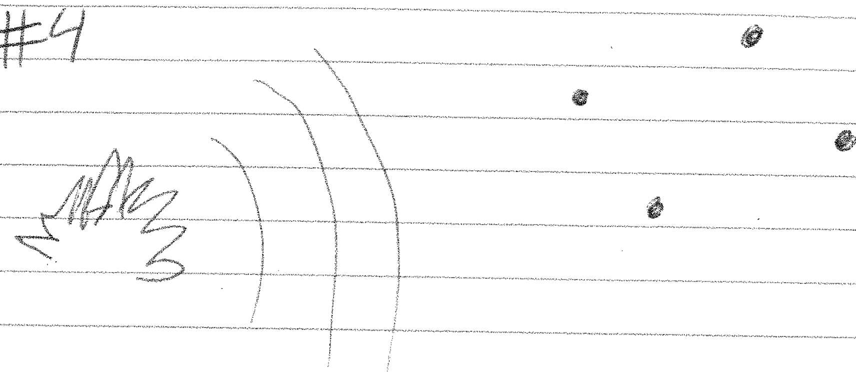
TP$_2$

#4



ce qu'on cherche :

- Position de l'explosion $Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- temps (ou heure) de l'explosion : T.

ce qu'on connait :

- Position des stations : $P_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}$
- L'heure enregistrée par la station i : t_i.
- Vitesse de l'onde de choc : v.

On peut alors calculer la distance entre l'explosion et la station i :

$v(t_i - T)$

On a alors la relation : $\|P - Q_i\| = v(t_i - T)$

$$\Rightarrow \|P - Q_i\|^2 = v^2 (t_i - T)^2$$

Ce qui nous donne une équation d'une sphère pour chaque station:

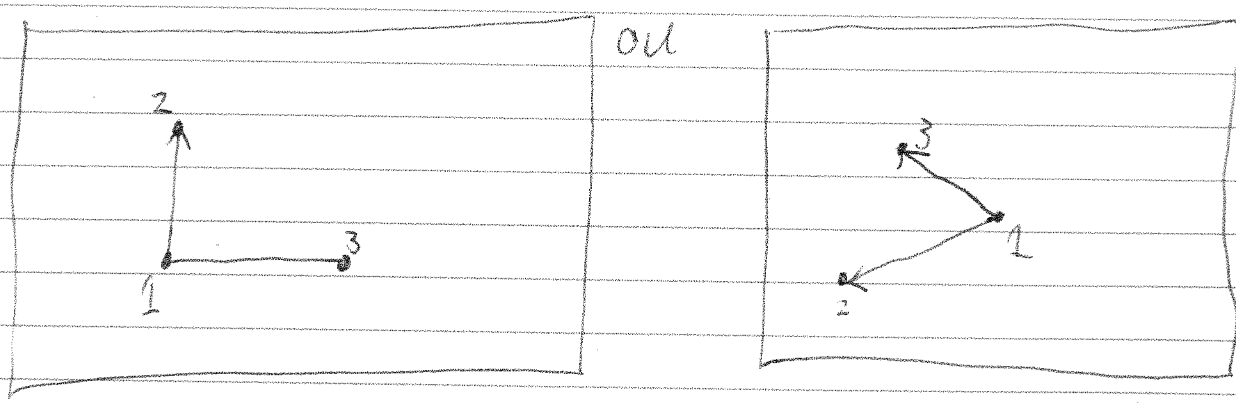
$$\begin{cases} (x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=(vt_1-vT)^2 \\ (x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2=(vt_2-vT)^2 \\ \vdots \end{cases}$$

qui est le même système à résoudre que pour le GPS, où on cherchait $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et τ.

#5.

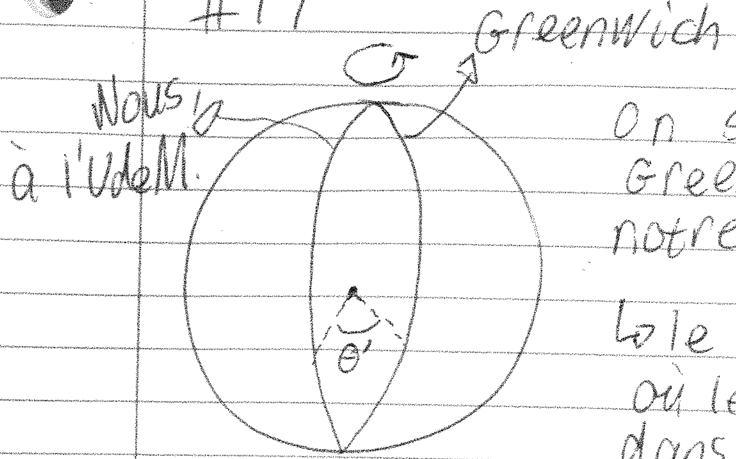
Pour munir une carte d'un système de coordonnée, il faut lui fournir un système d'axe et une origine.

Puisqu'on suppose que la carte est plannaire (en 2 dimensions), on a alors besoin de 3 points non alignés :



En terme d'algèbre linéaire, cela revient à dire que pour munir un plan d'un système de coordonnée, il faut deux vecteurs linéairement independants et un point du plan (ce qui peut être accompli par 3 points non alignés).

#17



On se met à l'heure de Greenwich et on note l'heure de notre zénith : T.

↳ le zénith est le midi théorique, où le soleil est à son plus haut dans le ciel.

Alors, le temps qui sépare les deux zéniths est :

$T - 12h$

on calcul ensuite notre longitude ainsi :

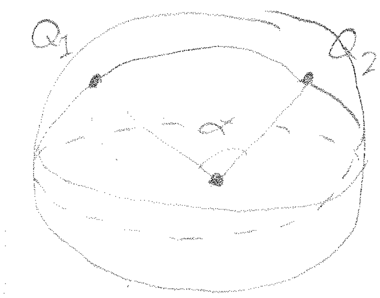
Vitesse angulaire (°/temps) • temps = θ'

$$\Rightarrow \frac{360°}{24h} \cdot (T - 12h) = 360° - \theta$$

où θ est la longitude et θ' est le petit angle entre notre

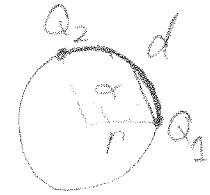
\#19

en dessin →



La distance min sera la portion de grand cercle. (arc de cercle) passant par les 2 points.

distance sur un cercle :



$\Rightarrow d = r\alpha$, où α est l'angle en radian

ici, tout ce qu'il nous faut savoir est l'angle α (en fct de $\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2$) séparant les deux points.

on sait qu'on peut calculer l'angle entre 2 vecto comme suit :

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos\alpha = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$$

or, ici : $\|\vec{Q_1}\| = R = \|\vec{Q_2}\|$ et

$$\left\langle \begin{pmatrix} R\cos\theta_1 \cos\varphi_1 \\ R\sin\theta_1 \cos\varphi_1 \\ R\sin\varphi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R\cos\theta_2 \cos\varphi_2 \\ R\sin\theta_2 \cos\varphi_2 \\ R\sin\varphi_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= R^2 \underbrace{\left(\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2\right)}_{\text{appelons cela } \beta}$$

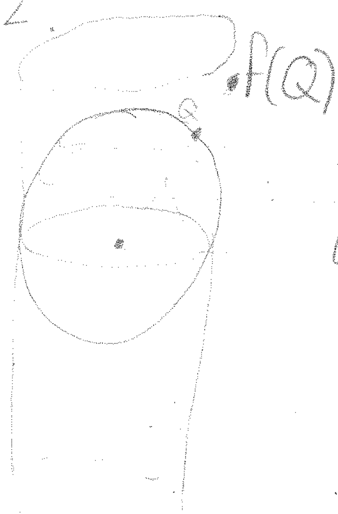
on a alors : $R^2 \cos\alpha = R^2 \beta$

$\Rightarrow \alpha = \arccos\beta$

et la distance cherchée est alors :

$d = R \cdot \alpha = R \cdot \arccos\beta.$

#22



$Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

droite d $\longrightarrow$ droite passant par l'origine et Q :

$d(t) = t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

on cherche alors l'intersection entre la droite et le cylindre.

avec $t > 0$ (car on veut un seul point).

$$\begin{cases} d(t) = t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t > 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ x_0^2 + y_0^2 = R^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow t x^2 + t y^2 = R^2 \Rightarrow t = \pm \dfrac{R}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (on prend le $+$)

$$\Rightarrow f(Q) = \begin{pmatrix} Rx \\ Ry \\ Rz \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

En coordonnées sphériques:

$$f(Q) = f\left(\begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} R^2\cos\theta\cos\varphi \\ R^2\sin\theta\cos\varphi \\ R^2\sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{R\sqrt{\cos^2\varphi}}$$

$$= \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ R\tan\varphi \end{pmatrix}$$

$\sqrt{\cos^2\varphi} = |\cos\varphi| = \cos\varphi$
car $-90° \leq \varphi \leq 90°$

Méridien : θ constant (θ_0)

$$f(Q) = \begin{pmatrix} R\cos\theta_0 \\ R\sin\theta_0 \\ R\tan\varphi \end{pmatrix}$$

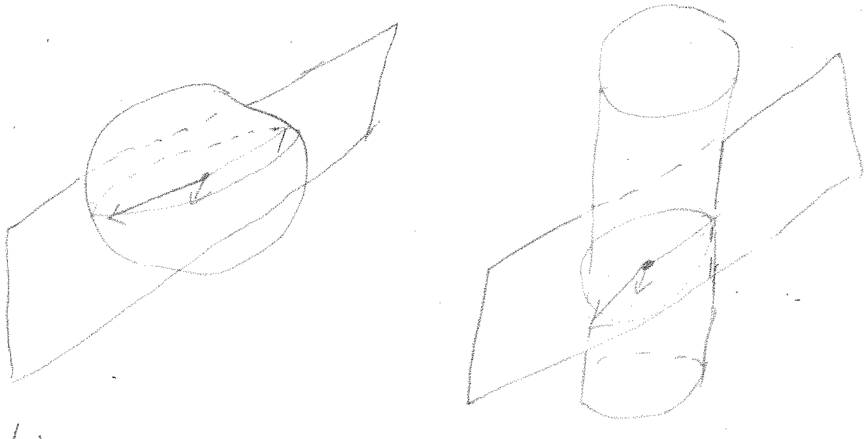
en x, y, c'est constant,
Puis la hauteur φ varie de $-\infty$ à $+\infty$.
L'image sera alors des droites verticales sur le cylindre.

Parallèles : φ constant (φ_0)

$$f(Q) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ R\tan\varphi_0 \end{pmatrix}$$

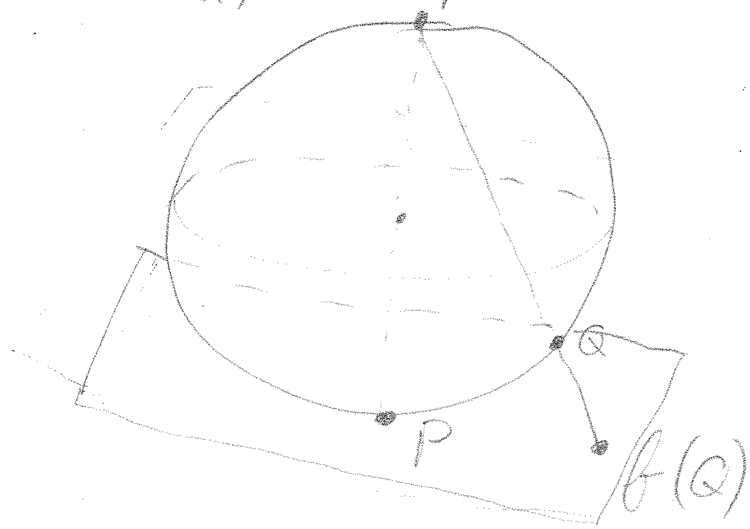
la hauteur, en z, est constante et en x,y, il s'agit de l'équation d'un cercle. L'image sera alors des cercles sur le cylindre

c) sur les grands cercles :
Un grand cercle est l'intersection entre un plan passant par l'origine et la sphère.



L'image sera alors l'intersection entre le plan et le cylindre. Avec des calculs, on peut vérifier qu'il s'agit d'ellipses.

#24 a)



f : formule de la projection

eq du plan tangent : $z = -1$

point P' : $(0,0,1)$.

Point Q (quelconque) : $Q = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

eq de la droite :

vecteur directeur : $\overrightarrow{P'Q} = Q - P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 - 1 \end{pmatrix}$

eq : $d(t) = t\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t x_0 \\ t y_0 \\ t(z_0 - 1) + 1 \end{pmatrix}$

f(Q) sera le point d'intersection entre le plan et la droite :

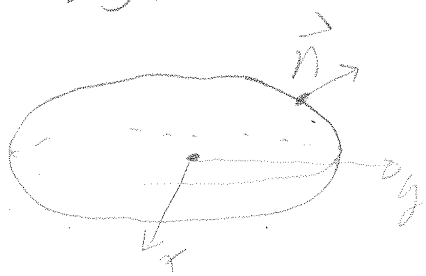
$$\begin{cases} z = -1 \\ \begin{pmatrix} t x_0 \\ t y_0 \\ t(z_0 - 1) + 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

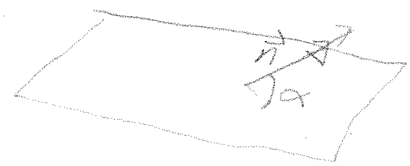
$\Rightarrow t(z_0-1)+1 = z = -1$

$\Rightarrow t = \dfrac{-2}{z_0-1}$

$$\Rightarrow f(Q) = \begin{pmatrix} \dfrac{-2x_0}{z_0-1} \\ \dfrac{-2x_0}{z_0-1} \\ -1 \end{pmatrix}$$

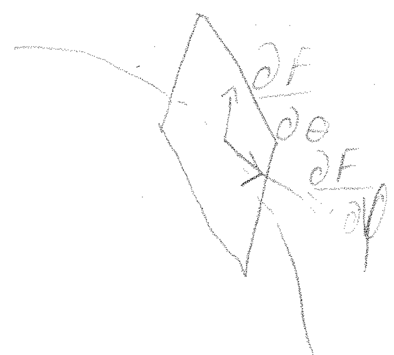
#25.





calculer $\vec{n}$:

$$F(\theta,\varphi) = (a\cos\theta\cos\varphi,\ a\sin\theta\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$$



$\vec{n} = \pm \frac{\partial F}{\partial \theta} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi}$ ($\pm$ car on veut que cela pointe vers l'extérieur, le signe est à déterminer plus tard).

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = (-a\sin\theta\cos\varphi,\ a\cos\theta\cos\varphi,\ 0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = (-a\cos\theta\sin\varphi,\ -a\sin\theta\sin\varphi,\ b\cos\varphi)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin\theta\cos\varphi & a\cos\theta\cos\varphi & 0 \\ -a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi & b\cos\varphi \end{vmatrix} = \frac{\partial F}{\partial \theta} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi}$$

$$= \vec{i}\left(ab \cos\theta \cos^2\varphi \right) - \vec{j}\left(-ab \sin\theta \cos^2\varphi\right)$$
$$+ \vec{k}\left(+a^2 \sin^2\theta \cos\varphi \sin\varphi + a^2 \cos^2\theta \sin\varphi \cos\varphi\right)$$

$$= \begin{pmatrix} ab \cos\theta \cos^2\varphi \\ ab \sin\theta \cos^2\varphi \\ a^2 \cos\varphi \sin\varphi \end{pmatrix}$$

choix signe : $+$, car fonctionne avec les directions des octants.

on a maintenant $\vec{n}$, il nous reste à connaître l'angle entre $z=0$ et $\vec{n}$.

l'angle entre $\vec{n}$ et le plan sera en fait l'angle entre $\vec{n}$ et la projection de $\vec{n}$ sur le plan : $proj_{z=0}\vec{n} = \begin{pmatrix} ab \cos\theta \cos^2\varphi \\ ab \sin\theta \cos^2\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

on calcul ensuite l'angle :

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{n}, proj_{z=0}\vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\| \cdot \|proj_{z=0}\vec{n}\|}$$

$$\|\vec{n}\|^2 = a^2b^2\cos^2\theta\cos^4\varphi + a^2b^2\sin^2\theta\cos^4\varphi + a^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi$$
$$= a^2\cos^2\varphi\left(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi\right)$$

$$\|\text{proj}_{z=0}\vec{n}\|^2 = a^2b^2\cos^2\theta\cos^4\varphi + a^2b^2\sin^2\theta\cos^4\varphi$$
$$= a^2b^2\cos^4\varphi.$$

$$\langle \vec{n}, \text{proj}_{z=0}\vec{n} \rangle = a^2b^2\cos^2\theta\cos^4\varphi + a^2b^2\sin^2\theta\cos^4\varphi$$
$$= a^2b^2\cos^4\varphi.$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{a^2\cos^2\varphi(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi)} = \beta$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\beta.$$

α est alors la latitude géodésique et ne dépend que de φ.