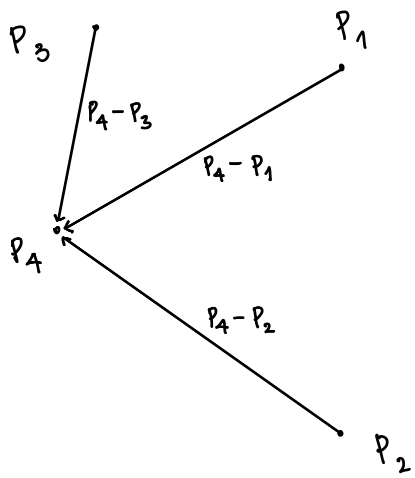
1. Montrer que le dénominateur de (1.14) s'annule si et seulement si les quatre satellites sont dans un même plan.

le dénominateur de (1.14) est donné par

$$\begin{vmatrix} 2(a_4-a_1) & 2(b_4-b_1) & 2(c_4-c_1) \\ 2(a_4-a_2) & 2(b_4-b_2) & 2(c_4-c_2) \\ 2(a_4-a_3) & 2(b_4-b_3) & 2(c_4-c_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - & 2(P_4-P_1) & - \\ - & 2(P_4-P_2) & - \\ - & 2(P_4-P_3) & - \end{vmatrix} = (*)$$

où les satellites sont en position P_1, P_2, P_3, P_4.



le déterminant $(*)$ est égal à

$$2^3 \begin{vmatrix} - & (P_4-P_1) & - \\ - & (P_4-P_2) & - \\ - & (P_4-P_3) & - \end{vmatrix} = 2^3 \cdot A,$$

où A est l'aire du parallélépipède engendré par les vecteurs P_4-P_1, P_4-P_2, P_4-P_3.

Il est nul ssi ces trois vecteurs sont dans un même plan, c'est-à-dire que les 4 satellites sont dans un même plan.

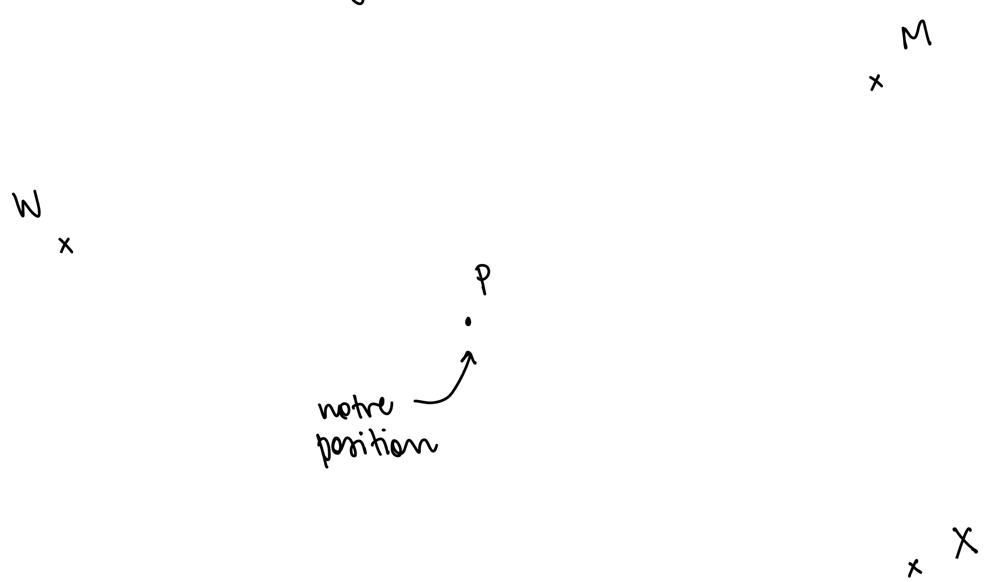
2. Le système Loran (pour « Long Range ») a longtemps été utilisé en navigation, en particulier sur la côte américaine. Comme plusieurs bateaux ont encore des récepteurs Loran, le système n'a pas encore été démantelé, même si de plus en plus de bateaux ont maintenant des GPS. Les stations émettrices pour le système Loran sont regroupées par chaînes de trois à cinq. Chaque chaîne comporte une station maître ou principale M et plusieurs stations asservies ou secondaires : W, X, Y, Z.

- La station principale envoie un signal.
- La station W reçoit le signal, attend une durée pré-établie et renvoie le même signal.
- La station X reçoit le signal, attend une durée pré-établie et renvoie le même signal.
- etc.

Les durées pré-établies sont choisies de telle sorte que l'on ne puisse avoir de doute sur la station d'origine des signaux captés dans la zone couverte par ces stations. Ici, le principe est que le récepteur Loran reçoit les signaux des stations émettrices et mesure le déphasage entre les signaux. Comme on a entre trois et cinq signaux, on a au moins deux déphasages indépendants.
a) Expliquer comment, en connaissant deux déphasages, on peut déterminer sa position.
b) En pratique, le déphasage entre la première antenne et la deuxième antenne permet de localiser le récepteur sur une branche d'hyperbole. Pourquoi ?
Commentaire Ces lignes hyperboliques de position sont dessinées sur les cartes marines. On connaît donc sa position sur une carte marine comme point d'intersection de deux branches d'hyperboles dessinées sur la carte.

Posons τ_W : déphasage entre M et W

τ_X : déphasage entre M et X



Soient T_M : temps de réception du signal de M
T_W : temps de réception du signal de W
T_X : temps de réception du signal de X

On a $T_M = \frac{|PM|}{c}$ $\qquad T_W = \frac{|WM|}{c} + \tau_W + \frac{|PW|}{c}$

$$T_X = \frac{|XM|}{c} + \tau_X + \frac{|PX|}{c}$$

Alors,

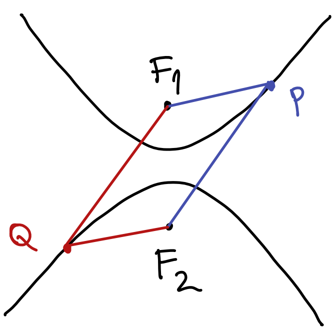
$$T_W - T_M = \frac{|WM|}{c} + \tau_W + \frac{|PW|}{c} - \frac{|PM|}{c}$$

$$T_X - T_M = \frac{|XM|}{c} + \tau_X + \frac{|PX|}{c} - \frac{|PM|}{c}$$

$$\Rightarrow |PW| - |PM| = c(T_W - T_M - \tau_W) - |WM| = K_1$$

$$\Rightarrow |PX| - |PM| = c(T_X - T_M - \tau_X) - |XM| = K_2$$

Hyperbole : lieu géométrique où chaque point a la propriété que la différence de sa distance à 2 points (appelés foyers) est constante.



$|PF_1| - |PF_2| = K < 0$

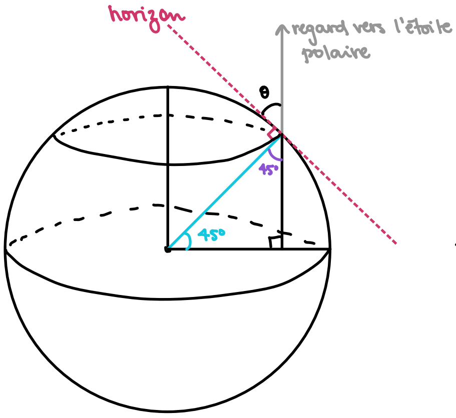
$|QF_1| - |QF_2| = K > 0$

14. L'étoile polaire est située sur l'axe de rotation de la Terre si bien qu'on ne peut l'apercevoir que lorsqu'on est dans l'hémisphère nord.

a) Si l'on est situé au 45e parallèle, avec quel angle au-dessus de l'horizon voit-on l'étoile polaire ? Et si on est situé au 60e parallèle ?

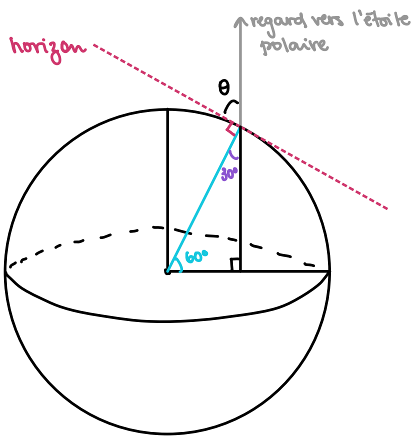
b) Supposez que vous voyez l'étoile polaire avec un angle θ au-dessus de l'horizon. À quelle latitude vous trouvez-vous ?

(a)



Lorsqu'on est au 45e parallèle, on cherche l'angle θ du dessin ci-contre.

On a $\theta = 180° - 90° - 45° = 45°$.



Lorsqu'on est au 60e parallèle, on cherche l'angle θ du dessin ci-contre.

On a $\theta = 180° - 90° - 30° = 60°$.

(b) Soit ℓ notre latitude. Les calculs au (a) suggèrent la relation $\theta = 180° - 90° - (90° - \ell) = \ell$, d'où nous sommes à la latitude $\ell = \theta$.

15. L'axe de la Terre fait un angle de 23,5 degrés avec la normale au plan de l'écliptique (le plan où gravitent les planètes autour du soleil).

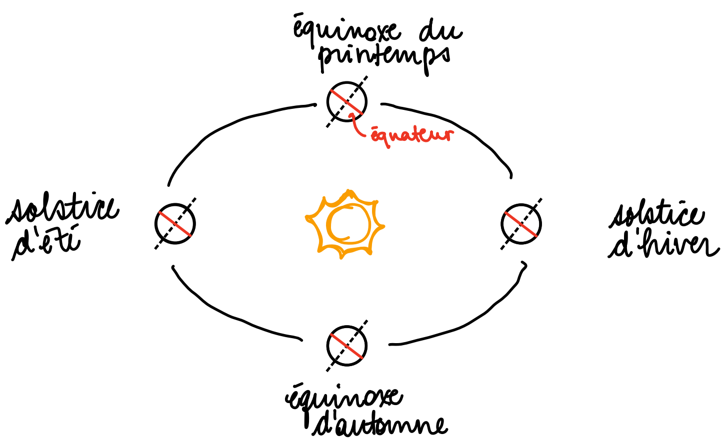
a) Le cercle polaire est situé à 66,5 degrés de latitude nord. Si vous êtes au cercle polaire, avec quel angle voyez-vous le soleil à midi au moment de l'équinoxe ? Au solstice d'été ? Au solstice d'hiver ? (Commentaire : c'est cette dernière propriété qui a conduit à donner son nom à ce parallèle particulier.)

b) Même question si vous êtes à l'équateur.

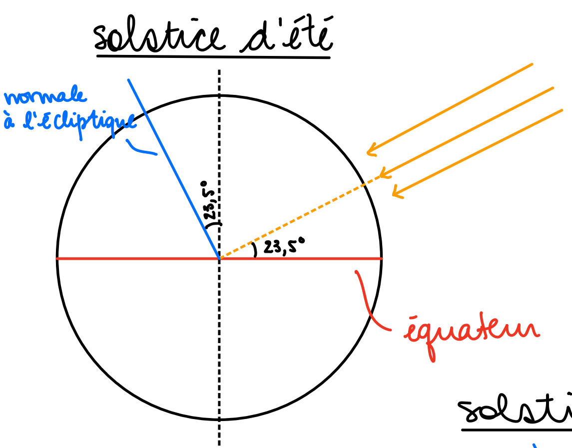
c) Même question si vous êtes au 45^{e} degré de latitude nord.

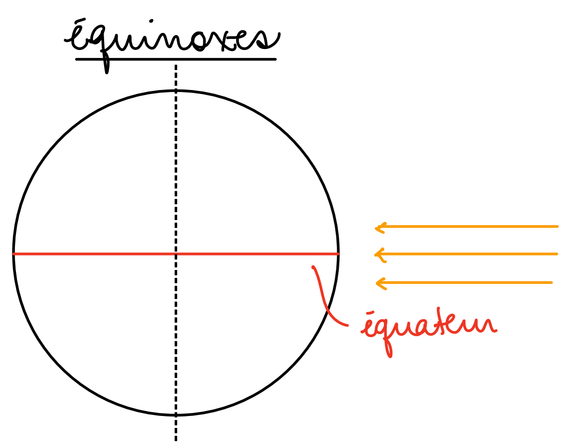
d) Le tropique du Cancer est situé à 23,5 degrés de latitude nord. Montrer que le soleil est vertical à midi au tropique du Cancer lors du solstice d'été.

e) Quels sont les points à la surface de la Terre pour lesquels le soleil est vertical à midi au moins un jour par an ?

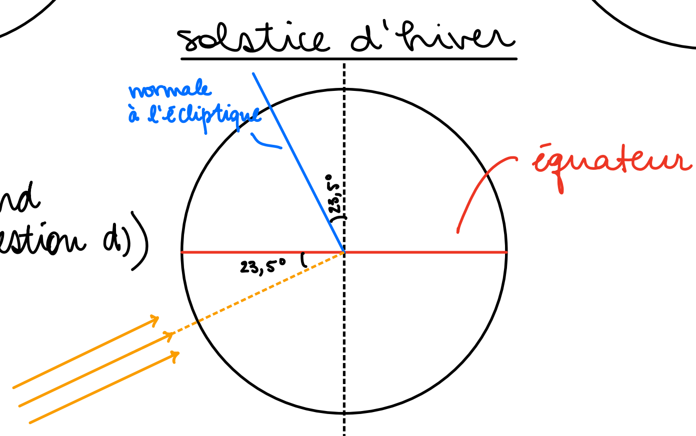


On en déduit l'angle avec lequel les rayons arrivent du Soleil à midi selon le moment de l'année :





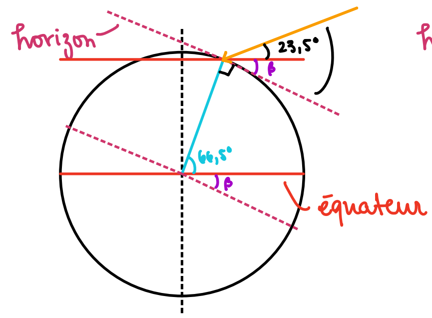
(ce dessin répond aussi à la question d))

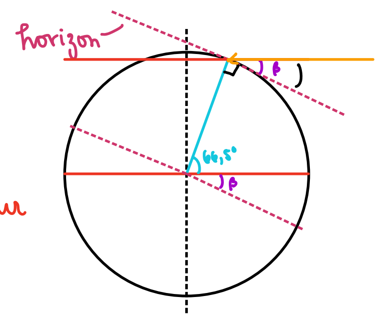


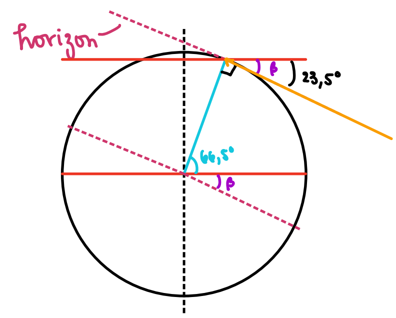
(a)-(b)-(c) :

	solstice d'été	équinoxes	solstice d'hiver

66,5°N

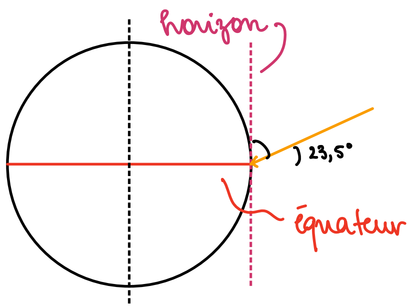


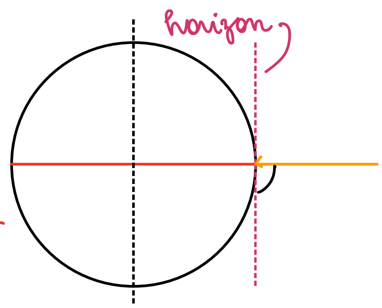


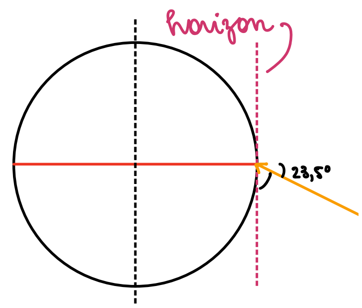


	solstice d'été	équinoxes	solstice d'hiver
	$\beta = 90° - 66{,}5° = 23{,}5°$.	$\beta = 90° - 66{,}5° = 23{,}5°$.	$\beta = 90° - 66{,}5° = 23{,}5°$.
	L'angle cherché est $23{,}5° + \beta = 47°$.	L'angle cherché est $0° + \beta = 23{,}5°$.	L'angle cherché est $-23{,}5° + \beta = 0°$.

équateur (0° N)

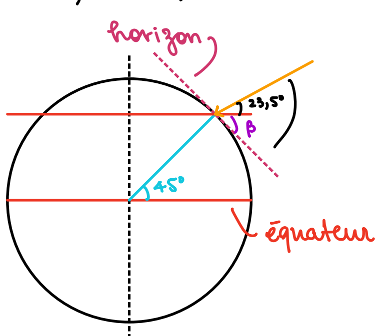


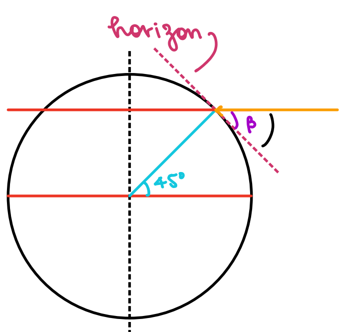


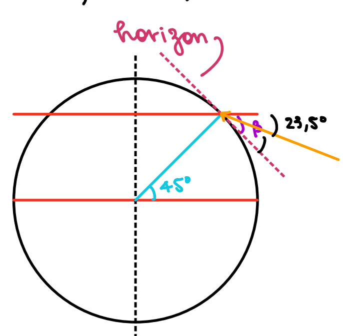


	solstice d'été	équinoxes	solstice d'hiver
	L'angle cherché est $90° - 23{,}5° = 66{,}5°$	L'angle cherché est $90°$.	L'angle cherché est $90° - 23{,}5° = 66{,}5°$.

45°N







	solstice d'été	équinoxes	solstice d'hiver
	$\beta = 90° - 45° = 45°$.	$\beta = 90° - 45° = 45°$.	$\beta = 90° - 45° = 45°$.
	L'angle cherché est $23{,}5° + \beta = 68{,}5°$.	L'angle cherché est $0° + \beta = 45°$.	L'angle cherché est $-23{,}5° + \beta = 21{,}5°$.

(e) La latitude à laquelle le Soleil est vertical à midi varie continûment à mesure que la Terre tourne autour du Soleil. La latitude maximale est atteinte au solstice d'été (tropique du Cancer à 23,5° N), la minimale est atteinte au solstice d'hiver (tropique du Capricorne à 23,5° S). Donc tous les points sur la Terre pour lesquels il existe un jour où le Soleil est vertical à midi sont ceux à une latitude $l \in [-23{,}5°, 23{,}5°]$.

18. Le fonctionnement du sextant Comme décrit dans les exercices 14 et 17, nous connaissons notre longitude ou notre latitude en mesurant l'angle que fait la droite entre nous et le soleil ou entre nous et l'étoile polaire avec le plan horizontal. Ceci est très beau en théorie, mais, en pratique, comment mesurer des angles de manière précise si on se trouve sur un bateau secoué par la houle ? C'est là que le sextant nous vient en aide. Le sextant utilise un système de deux miroirs. L'utilisateur peut ajuster l'angle entre les deux miroirs. Il ajuste l'angle entre les miroirs de

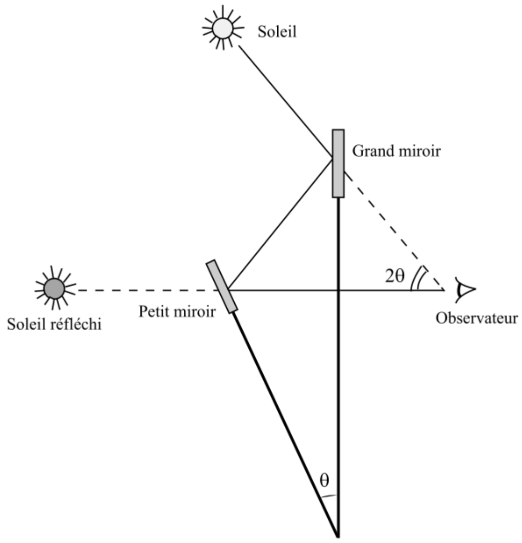


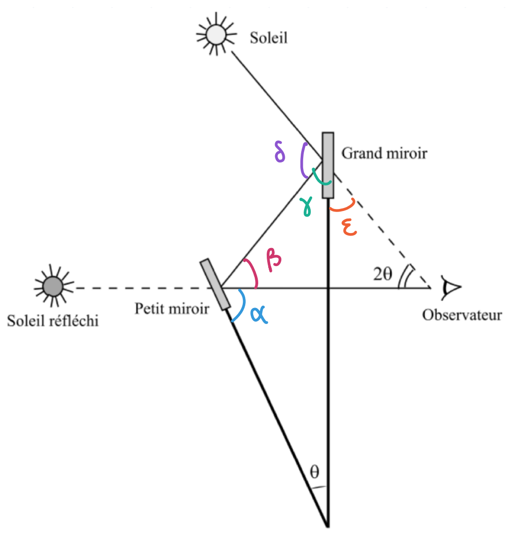
Fig. 1.12. Le fonctionnement du sextant (exercice 18)

manière à ce qu'il voie l'image réfléchie du soleil ou de l'étoile polaire exactement au niveau de l'horizon comme sur la figure 1.12.

a) Montrer que, si l'angle entre les deux miroirs est θ, alors l'angle que fait le soleil ou l'étoile polaire avec l'horizon est de 2θ.

b) Vous convaincre que ce système n'est pas trop sensible à la houle.

(a)



① $\alpha = 180^\circ - 90^\circ - \theta = 90^\circ - \theta$

(somme des angles intérieurs d'un Δ)

② $\beta = 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - 2(90^\circ - \theta)$

$= 2\theta$

(angles supplémentaires + loi de la réflexion)

③ $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \beta = 90^\circ - 2\theta$

(somme des angles intérieurs d'un Δ)

④ $\delta = 180° - 2\gamma = 180° - 2(90° - 2\theta) = 4\theta$

(angles supplémentaires + loi de la réflexion)

⑤ $\varepsilon = 180° - \delta - \gamma = 180° - 4\theta - (90° - 2\theta) = 90° - 2\theta$

(angles supplémentaires)

⑥ L'angle désiré est $180° - 90° - \varepsilon = 90° - (90° - 2\theta) = 2\theta$. ✓