

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE
FACULTÉ DES ARTS ET DES SCIENCES – UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SIGLE DU COURS : MAT 2450
 TITRE DU COURS : Mathématiques et technologie
 NOM DE LA PROFESSEURE : Christiane ROUSSEAU
 DATE DE L'EXAMEN : Mardi 17 avril Examen final —
 SESSION : Hiver 2017

DIRECTIVES PÉDAGOGIQUES :

- Manuel autorisé ou bien deux feuilles de notes recto-verso, plus le chapitre photocopié sur la loi de Benford
- Calculatrice non programmable permise
- Le total des points est de 102 : il représente votre note sur 100
- **Justifier toutes vos réponses**

(15) 1. Le tableau suivant donne les premiers chiffres significatifs de la superficie en km² des bassins de drainage de 109 fleuves dans le monde d'après la page de Wikipedia « List of rivers by length » :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n _i	30	20	13	10	6	4	9	11	6

Tester avec un seuil de 5% si ces nombres obéissent à la loi de Benford.

Rappel : voici la table de la loi du χ^2 à la ligne correspondant à 8 degrés de liberté :

p	0,1	0,05	0,025	0,01	0,001
seuil	13,36	15,51	17,53	20,09	26,13

2. Voici un principe simple de cryptographie. Le carré blanc \square est représenté par le chiffre 0. Les lettres A, ..., Z par les nombres 1, ..., 26. Le nombre 27 correspond au point et le nombre 28, à la virgule. La table ci-dessous résume ceci :

Symbole à coder	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Nombre associé	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Symbole à coder	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	.	,		
Nombre associé	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28		

Voici comment on code un mot :

- on remplace les symboles par leurs nombres associés ;
- pour chaque symbole, on calcule le reste de la division par 29 de 3^n , où n est le nombre associé au symbole ;
- on réduit le résultat obtenu modulo 29 ;
- on trouve les symboles correspondant aux nombres obtenus : ceci nous donne le mot codé.

Par exemple, pour coder le mot « DE » on remplace ses lettres par les nombres 4, 5. On calcule $3^4, 3^5$ et on obtient 81, 243. On les réduit modulo 29, ce qui donne 23, 11. La lettre associée à 23 est W ; celle associée à 11 est K. Le mot codé représentant « DE » est « WK ».

- (5) (a) Coder le mot « JET ».
- (10) (b) Expliquer pourquoi le code est inversible, c'est-à-dire pourquoi les lettres de code sont toutes distinctes.

3. On donne le polynôme $p(x) = x^2 + x + 1$ à coefficients dans \mathbb{F}_2 .
- (5) (a) Montrer qu'il est irréductible et primitif.
- (5) (b) Donner la table de multiplication du corps \mathbb{F}_4 à 4 éléments.

4. On considère la Toile de la figure 1.

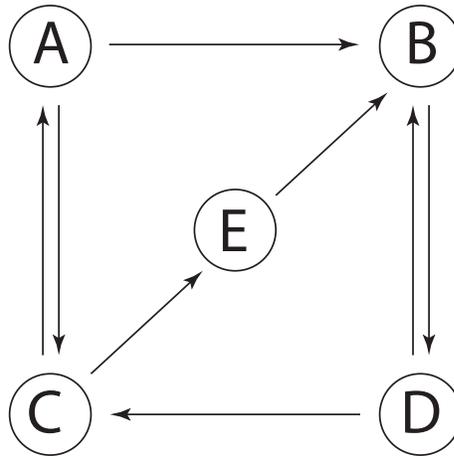


FIGURE 1 – La Toile de l'exercice 4

- (3) (a) Si vous partez de la page E, où serez-vous après trois clics ? Avec quelle probabilité pour chacune des possibilités ?
- (5) (b) Si vous partez de la page C, où serez-vous après cinq clics ? Avec quelle probabilité pour chacune des possibilités ?
- (12) (c) Calculer la distribution stationnaire. Classer les pages par ordre d'importance.

5. Voici un exemple de code correcteur d'erreurs. Le message initial est un ensemble de trois nombres de 1 à 99, notés par deux chiffres : appelons n_1, n_2, n_3 ces trois nombres. Ainsi, on note 1 par 01, 2 par 02, etc. Le mot code associé est construit en ajoutant deux autres nombres n_4 et n_5 . Le premier, n_4 , est la somme des trois nombres $n_1 + n_2 + n_3$. Le deuxième, n_5 , est la somme pondérée $n_1 \times 1 + n_2 \times 2 + n_3 \times 3$. Comme n_4 et n_5 peuvent avoir jusqu'à trois chiffres, on les écrit avec 3 chiffres (ainsi 005 dénote 5, 012 dénote 12, etc.).

- (3) (a) Construire le mot de code associé à 01 23 16.
- (6) (b) Montrer que ce code permet de détecter qu'un des cinq nombres a été transmis de manière erronée.
- (10) (c) Montrer que ce code permet de récupérer le message initial dans le cas d'une seule erreur qui se serait produite sur un des cinq nombres. **Suggestion** : dans le cas d'une erreur sur un des trois premiers nombres, utiliser la différence entre la somme simple calculée après réception et celle reçue pour trouver la valeur de l'erreur, et utiliser la différence entre la somme pondérée calculée après réception et la somme pondérée reçue pour trouver le rang de la position de l'erreur.
- (3) (d) Corriger l'erreur si on a reçu 02 13 12 023 056.

6. On considère le robot de la figure 2. Ce robot bouge dans un plan. Il est donné par un chariot monté sur un rail circulaire de rayon R de centre O sur lequel pivote un bras de longueur R . Pour le problème, la position d'un point P sera donnée par ses coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé standard centré en O .

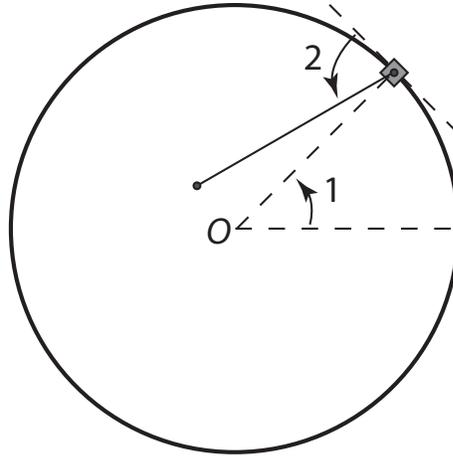


FIGURE 2 – Le robot de l'exercice 6

- (5) (a) Montrer que le bout du bras peut atteindre n'importe quel point du disque centré en O de rayon $2R$.
- (5) (b) Donner une valeur des angles θ_1 et θ_2 des deux mouvements pour que l'extrémité du bras soit situé en $(\sqrt{2}R, \sqrt{2}R)$.
- (10) (c) Donner toutes les valeurs possibles des angles θ_1 et θ_2 des deux mouvements pour que l'extrémité du bras soit situé en $(0, \frac{R}{2})$.
-

Christiane ROUSSEAU