Examen intra 1

Analyse 3

MAT2100

L'examen dure 1h50. **Justifiez toutes vos réponses** (même les questions courtes). Il est sur 30 points. Si les points bonus font dépasser le total au-delà de 30, alors les points excédentaires seront ignorés.

Enseignant : Jonathan Godin
Session : H22

Questions courtes.
N'oubliez pas de justifier.

Question 1. (3pts) Peut-on trouver un ensemble E dans $(\mathbb{R}, d_2)$ tel que $E' = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$?

Non, car E' est fermé, mais $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ne l'est pas. ($\frac{1}{n} \to 0 \notin \{\frac{1}{n}\}_n$).

Question 2. (3pts) Montrer que $E^\circ \cup F^\circ \subseteq (E \cup F)^\circ$ et que l'inclusion peut être stricte.

$E^\circ \cup F^\circ$ est un ouvert de $E \cup F$, donc il est dans l'intérieur, puisque $(E \cup F)^\circ$ est le plus ouvert de $E \cup F$. Stricte : $E = [0,1]$ et $F = [1,2]$.

Question 3. (3pts) Soit (X, d) un espace métrique discret* non vide. Quels sont les sous-ensembles

a) ouverts de X?

Tout $E \in \mathcal{P}(X)$, car $E = \bigcup_{x \in E} \{x\}$ et $\{x\}$ est ouvert

b) denses dans X?

Seulement X, car $\overline{E} = E$ par a)

c) nulle part denses dans X? $((\overline{E})^\circ = \emptyset?)$

Seulement $\emptyset$, car $(\overline{E})^\circ = E^\circ = E$ par a).

Questions longues.

Question 4. (10pts) Soit $X = \{f \colon [0,1] \to [a,b] \mid f \text{ est continue}\}$ muni de la métrique d_∞. Montrer que

$$E = \{f \colon [0,1] \to [a,b] \mid f \text{ est continue et surjective}\}$$

est fermé dans (X, d_∞).

Soit (f_n) dans E t.q. $f_n \xrightarrow{d_\infty} f \in X$. $\forall y \in [a,b]$, $\forall n$, $\exists x_n$, $f_n(x_n) = y$. (x_n) possède une ss-suite convergente $x_{n_k} \to x$. On a $|y - f(x_{n_k})| = |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \leq d_\infty(f_{n_k}, f) \to 0$, d'où $f(x) = y$. $\Rightarrow f$ est surj.

Question bonus. (3pts) Montrer que $H = \{f \colon [0,1] \to [a,b] \mid f \text{ est continue et injective}\}$ n'est pas ouvert dans (X, d_∞).

Suggestion. C'est probablement plus simple de prendre $[a,b] = [0,1]$, mais ce n'est pas essentiel.

Il y a d'autres façons de faire le numéro. J'en ai mis une autre à la fin.

Suite au verso

---

* Rappel : un espace métrique est discret si pour tout $x \in X$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) = \{x\}$.

Question 5. (11pts) Soit $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ définie par

$$d\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \begin{cases} |x_1 - y_1| + |x_2| + |y_2|, & \text{si } x_1 \neq y_1 \\ |x_2 - y_2|, & \text{si } x_1 = y_1. \end{cases}$$

Choisir et faire la question 5.1 **ou** 5.2.

5.1 a) Montrer que d est une métrique sur $\mathbb{R}^2$.

b) La suite $\big(1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle dans $(\mathbb{R}^2, d)$?

ou

5.2 On tient pour acquis que d est une métrique.

a) La suite $\big(1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle dans $(\mathbb{R}^2, d)$?

b) Décrire et dessiner la boule ouverte $B(a,1)$, où $a = \big(0,\frac{1}{2}\big)$.

c) Cette métrique est-elle induite par une norme? Vous pouvez utiliser les résultats des exercices sur les métriques induites.

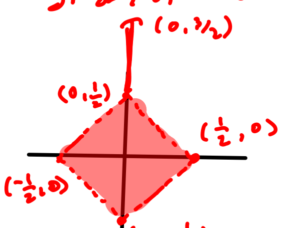
5.2 est moins long.

a) Non, car si $d\big((1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}),(x,y)\big) \to 0$, alors on a $1+\frac{1}{n} \neq x$ $\forall n \geq N$, donc

$d\big((1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}),(x,y)\big) = |1+\frac{1}{n} - x| + |1+\frac{1}{n}| + |y| \to |1-x| + 1 + |y| \neq 0$

b) Si $x=0$, alors $d(a,(0,y)) = |\frac{1}{2} - y| < 1 \iff x = 0$ et $-\frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}$.
(segment de droite)

Si $x \neq 0$, alors $d(a,(x,y)) = |x| + |y| + \frac{1}{2} < 1$ (Intérieur d'un losange)



(sans la frontière du losange, mais avec le point $(0,\frac{1}{2})$.)

c) Non, car $B(a,1)$ n'est pas convexe. En effet,
$(\frac{1}{4}, 0)$ et $(0, \frac{3}{4})$ sont dans $B(a,1)$,
mais pas $z = \frac{1}{2}(\frac{1}{4},0) + \frac{1}{2}(0,\frac{3}{4})$
$= (\frac{1}{8}, \frac{3}{8})$, car

$d(a,z) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \not< 1.$

Donc $\{t(\frac{1}{4},0) + (1-t)(0,\frac{3}{4}) \mid t \in [0,1]\}$
$\notin B(a,1).$

5.1. Celui-ci est plutôt pénible. La séparation et la symétrie ont été réussies, donc je ne les ferai pas.

Inégalité triangulaire : $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$, $Z = (z_1, z_2)$

M.q. $d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$. Il y a 5 cas.

$x_1 = y_1 \to x_1 \neq z_1$ ①
$x_1 = y_1 \to x_1 = z_1$ ②

$x_1 \neq y_1 \to x_1 = z_1$ ③
$x_1 \neq y_1 \to x_1 \neq z_1,\ y_1 \neq z_1$ ④
$x_1 \neq y_1 \to y_1 = z_1$ ⑤

Les cinq cas sont aussi ennuyants les uns que les autres.

1. $d(X,Y) = |x_2 - y_2| \leq |x_2| + |y_2| \leq |x_2| + |y_2| + (|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + 2|z_2|)$
$= d(X,Z) + d(Z,Y)$

2. $d(X,Y) = |x_2 - y_2| \leq |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|$
$\leq d(X,Z) + |z_2| + |y_2| + |z_1 - y_1|$
$= d(X,Z) + d(Z,Y)$

3. $d(X,Y) = |x_1 - y_1| + |x_2| + |y_2| = |z_1 - y_1| + |y_2| + (|z_2| - |z_2|) + |x_2|$
$= d(Z,Y) + |x_2| - |z_2|$
$\leq d(Y,Z) + |x_2 - z_2| = d(X,Z) + d(Y,Z)$

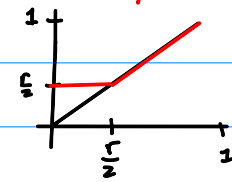
4. $d(X,Y) = |x_1 - y_1| + |x_2| + |y_2| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2| + |y_2| + 2|z_2|$
$= d(X,Z) + d(Z,Y)$

5. $d(X,Y) = |x_1 - y_1| + |x_2| + |y_2| = |x_1 - z_1| + |x_2| + (|z_2| - |z_2|) + |y_2|$
$= d(X,Z) + |y_2| - |z_2|$
$\leq d(X,Z) + |y_2 - z_2| = d(X,Z) + d(Y,Z)$.

On peut voir que 3. et 5. sont symétriques, donc on pourrait se sauver d'un cas.

Bonus. Voici un exemple simple. Soit $r \in (0,1)$. On pose

$$f_r(x) = \begin{cases} \frac{r}{2}, & \text{si } x \in [0, \frac{r}{2}), \\ x, & \text{si } x \in [\frac{r}{2}, 1] \end{cases}$$



graphe de f_r en rouge.

f_r est continue, puisqu'en $x = \frac{r}{2}$, il n'y a pas de discontinuité.

f_r n'est pas injective, puisque $f(0) = f(\frac{r}{2})$.

Il faudrait vérifier avec les limites, mais ça se voit bien à l'œil.

Enfin, $\forall r > 0$, on a

$$\sup_{[0,1]} |f_r - id| = \frac{r}{2} < r \Rightarrow f_r \in B(id, r) \Rightarrow B(id, r) \nsubseteq H.$$

donc id est dans H, mais $id \notin H^\circ$, d'où H n'est pas ouvert.

Solution alternative du 4:

On montre que E^c est ouvert. Soit $f \in E^c$. Alors f n'est pas surjective.

Soit $\operatorname{im} f = [\alpha, \beta] \subsetneq [a,b]$

1. Si $\beta < b$, alors on pose $r = \frac{b-\beta}{2}$. On a alors que $\forall g \in B(f,r)$,

$$\max_{[0,1]} g \le \max_{[0,1]} (g-f) + \max_{[0,1]} f \le r + \beta = \frac{b+\beta}{2} < \frac{b+b}{2} = b$$

donc g n'est pas surjective.

2. Si $\alpha > a$, alors on pose $r = \frac{\alpha - a}{2}$. On a alors que $\forall g \in B(f,r)$,

$$\min_{[0,1]} g \ge \min_{[0,1]} (g-f) + \min_{[0,1]} f \ge -r + \alpha = \frac{a+\alpha}{2} > \frac{a+a}{2} = a.$$

Encore, on trouve que g n'est pas surjective.

On conclut qu'il existe $r>0$ tel que $B(f,r) \subseteq E^c$. D'où E^c est ouvert.

À remarquer qu'on ne peut pas faire un "SPDG, $\beta < b$", car le cas $\alpha > a$ est différent (bien que semblable).