Examen intra 1

Analyse 3

MAT2100

L'examen dure 1h50. **Justifiez toutes vos réponses** (même les questions courtes). Il est sur 30 points. Si les points bonus font dépasser le total au-delà de 30, alors les points excédentaires seront ignorés.

Enseignant : Jonathan Godin
Session : H22

Questions courtes.
N'oubliez pas de justifier.

Question 1. (3pts) Peut-on trouver un ensemble E dans $(\mathbb{R}, d_2)$ tel que $E' = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$?

Question 2. (3pts) Montrer que $E^\circ \cup F^\circ \subseteq (E \cup F)^\circ$ et que l'inclusion peut être stricte.

Question 3. (3pts) Soit (X, d) un espace métrique discret* non vide. Quels sont les sous-ensembles

a) ouverts de X?

b) denses dans X?

c) nulle part denses dans X? $((\overline{E})^\circ = \emptyset?)$

Questions longues.

Question 4. (10pts) Soit $X = \{f \colon [0,1] \to [a,b] \mid f \text{ est continue}\}$ muni de la métrique d_∞. Montrer que

$$E = \{f \colon [0,1] \to [a,b] \mid f \text{ est continue et surjective}\}$$

est fermé dans (X, d_∞).

Question bonus. (3pts) Montrer que $H = \{f \colon [0,1] \to [a,b] \mid f \text{ est continue et injective}\}$ n'est pas ouvert dans (X, d_∞).
Suggestion. C'est probablement plus simple de prendre $[a,b] = [0,1]$, mais ce n'est pas essentiel.

Suite au verso

* Rappel : un espace métrique est discret si pour tout $x \in X$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) = \{x\}$.

Question 5. (11pts) Soit $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ définie par

$$d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \begin{cases} |x_1 - y_1| + |x_2| + |y_2|, & \text{si } x_1 \neq y_1 \\ |x_2 - y_2|, & \text{si } x_1 = y_1. \end{cases}$$

Choisir et faire la question 5.1 **ou** 5.2.

5.1 a) Montrer que d est une métrique sur $\mathbb{R}^2$.

b) La suite $\big(1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle dans $(\mathbb{R}^2, d)$?

ou

5.2 On tient pour acquis que d est une métrique.

a) La suite $\big(1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle dans $(\mathbb{R}^2, d)$?

b) Décrire et dessiner la boule ouverte $B(a, 1)$, où $a = \big(0, \frac{1}{2}\big)$.

c) Cette métrique est-elle induite par une norme? Vous pouvez utiliser les résultats des exercices sur les métriques induites.