

Examen intra 1

Analyse 3

MAT2100

L'examen dure 1h50. **Justifiez toutes vos réponses**, sauf indication contraire. Aucun matériel permis.

Enseignant : Jonathan Godin

Session : H23

/30

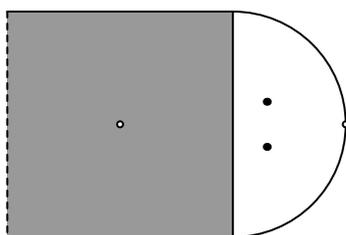
Question 1. (4pts) Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble représenté par le dessin ci-bas. On utilise les conventions suivantes : un trait pointillé ne fait pas partie de E , un trait plein signifie qu'il est dans E , un point représente un singleton dans E , un point vide signifie qu'il n'est pas dans E , la région en gris est dans E , mais pas celle en blanc. Dessiner les ensembles suivants dans votre cahier d'examen **sans justifier**. Expliquer à l'aide de mots les détails importants d'un dessin au besoin.

a) E'

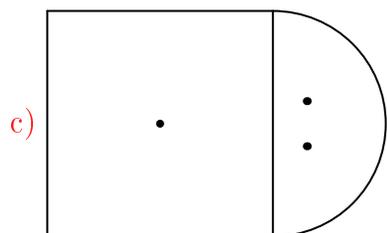
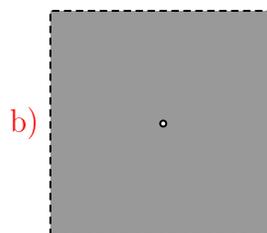
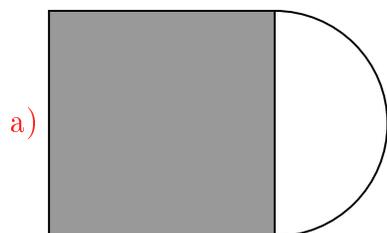
b) E°

c) ∂E

d) points isolés de E



Solution.



Question 2. (6pts) Soit (X, d) un espace métrique discret*. Quelles sont les suites conver-

* Rappel : un espace métrique est discret si tous les points sont des points isolés.

gentes de X ?

Solution. Une suite (x_n) converge si et seulement si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $x_n = x_N$.

Supposons que (x_n) converge vers x . Puisque x est isolé, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) = \{x\}$. Puisque $x_n \rightarrow x$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $d(x_n, x) < r$. Il suit que $x_n \in B(x, r) = \{x\}$, c'est-à-dire que $x_n = x$.

La réciproque est claire. En effet, si $x_n = x_N$ pour tout $n \geq N$, alors on a $d(x_n, x_N) = 0$ et donc $d(x_n, x_N) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, d'où (x_n) est convergente.

Question 3. (10pts) Soit l'espace métrique (\mathbb{R}^2, d_2) et soit $E \subseteq \mathbb{R}^2$ défini par

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Q} \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

a) Calculer E° .

b) Calculer ∂E . L'ensemble E est-il fermé ?

Solution. a) On montre que $E^\circ = \emptyset$. Soit $z \in E$ et $r > 0$. On écrit $z = (x, y)$. Puisque $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} , il existe $q_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $|x - q_1| < r$. Ainsi, on voit que

$$d(z, (q_1, y)) = \sqrt{|x - q_1|^2 + 0} = |x - q_1| < r.$$

Ainsi, on voit que $(q_1, y) \in B(z, r)$, mais $(q_1, y) \notin E$, donc $B(z, r) \not\subseteq E$, d'où $z \notin E^\circ$.

b) On montre que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R}^2 . Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors il existe deux suites (x_n) et (y_n) dans \mathbb{Q} telles que $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$ dans \mathbb{R} . Ainsi, on a $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ dans \mathbb{R}^2 , où $((x_n, y_n))$ est une suite de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Ensuite, on a

$$\overline{E} = \overline{(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap \overline{B}((0, 0), 1)} = \overline{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}} \cap \overline{B}((0, 0), 1) = \mathbb{R}^2 \cap \overline{B}((0, 0), 1) = \overline{B}((0, 0), 1).$$

Puisque $\overline{B}((0, 0), 1) \neq E$, il suit que E n'est pas fermé.

De plus, puisque $E^\circ = \emptyset$, on conclut que

$$\partial E = \overline{E} \setminus E^\circ = \overline{E} \setminus \emptyset = \overline{E} = \overline{B}((0, 0), 1).$$

Question 4. (10pts) Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et soit $f: X \rightarrow Y$ une fonction continue. Soit $a \in X$ un point de X . Montrer que

$$E = \{x \in X \mid f(x) \neq f(a)\}$$

est ouvert dans X .

Solution. Soit $x \in E$. Par définition de E , on a $f(x) \neq f(a)$. On pose $\varepsilon = d'(f(x), f(a)) > 0$. Puisque f est continue, il existe $\delta > 0$ tel que $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$. On remarque que $f(a) \notin B(f(x), \varepsilon)$ par le choix de ε .

Soit $y \in B(x, \delta)$. Puisque $f(y) \in f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$, on a que $f(y) \neq f(a)$ et donc $y \in E$. Il suit que $B(x, \delta) \subseteq E$ et donc que $x \in E^\circ$. Comme x était quelconque, on déduit que $E \subseteq E^\circ$, d'où E est ouvert.