Examen intra 2

Analyse 3

MAT2100

L'examen dure 1h50. **Justifiez toutes vos réponses**. Aucun matériel permis.

Enseignant : Jonathan Godin
Session : H23

/30

Question 1. (5pts) Montrer que , dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$, le disque unité $\overline{B}\big((0,0),1\big)$ et le cercle unité $\partial\overline{B}\big((0,0),1\big)$ ne sont pas homéomorphes.

Solution. Supposons le contraire. Soit $f\colon \overline{B}\big((0,0),1\big) \to \partial\overline{B}\big((0,0),1\big)$ un homéomorphisme. Soit $a, b \in \partial\overline{B}\big((0,0),1\big)$ deux points distincts et $x = f^{-1}(a)$, $y = f^{-1}(b)$.

Alors $\tilde{f}\Big|_{\overline{B}\left((0,0),1\right)\setminus\{x,y\}} \colon \overline{B}\big((0,0),1\big) \setminus \{x,y\} \to \partial\overline{B}\big((0,0),1\big) \setminus \{a,b\}$ définie par $\tilde{f}(z) = f(z)$ est un homéomorphisme. Or, $\partial\overline{B}\big((0,0),1\big) \setminus \{a,b\}$ a deux composantes connexes et $\overline{B}\big((0,0),1\big) \setminus \{x,y\}$ est connexe, ce qui est impossible.

On déduit que f ne peut pas être un homéomorphisme.

Question 2. (5pts) Soit (X,d) un espace métrique compact.

a) Montrer que si $\{F_i\}_{i\in I}$ est une collection de fermés de X telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, alors il existe $i_1, \ldots, i_n$ tels que $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n} = \emptyset$.

b) Montrer que si $I = \mathbb{N}$ et $F_n \downarrow \emptyset$,[Note 1] alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F_N = \emptyset$.

Solution. a) En prenant le complément, on a

$$\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)^c = \emptyset^c \qquad \Rightarrow \qquad \bigcup_{i\in I} F_i^c = X.$$

Ainsi, la collection $\{F_i^c\}_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X. Puisque X est compact, il existe $i_1, \ldots, i_n$ tels que $X = F_{i_1}^c \cup \cdots \cup F_{i_n}^c$. En prenant encore le complément, on obtient $\emptyset = F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n}$.

b) Par le a), il existe $i_1 < \ldots < i_N$ tels que $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_N} = \emptyset$. Puisque $F_{i_1} \supseteq F_{i_2} \supseteq \cdots \supseteq F_{i_N}$, on a également que $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_N} = F_{i_N}$. Ainsi, i_n est le naturel recherché.

Question 3. (10pts) Soit l'espace métrique $\big(\mathbb{R}^{n\times n}, d_2\big)$, où $\mathbb{R}^{n\times n}$ est l'ensemble des matrices

[Note 1] Rappel : $F_n \downarrow \emptyset$ signifie que $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$.

$n \times n$ à coefficients réels et d_2 est donnée, pour $A = (a_{ij})_{ij}$ et $B = (b_{ij})_{ij}$ dans $\mathbb{R}^{n\times n}$, par

$$d_2(A,B) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - b_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

a) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\det_n : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, la fonction déterminant, est continue.
Indice. Pour une matrice A de taille $n \times n$, considérez l'application $P_{ij} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ définie par $P(A) = A_{ij}$, où A_{ij} est la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en retirant la i-ième ligne et le j-ième colonne de A.

b) Montrer que $G = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A \text{ est inversible}\}$ n'est pas connexe.
Remarque. On tient pour acquis que A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

c) Pour $n \geq 2$, montrer que $E := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : |\det A| \leq 1\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^{n\times n}$ et qu'il n'est pas compact.

Solution. a) Soit P_{ij} comme dans l'indice. Commençons par montrer que P_{ij} est continue. Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. On a

$$\begin{aligned} d_2\big(P_{ij}(A), P_{ij}(B)\big) = d_2(A_{ij}, B_{ij}) &= \left(\sum_{\ell \neq i} \sum_{m \neq j} (a_{\ell m} - b_{\ell m})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{(*)}{\leq} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} (a_{\ell m} - b_{\ell m})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = d_2(A,B). \end{aligned}$$

Il suit que P_{ij} est 1-Lipschitz. $\Big[$L'inégalité $(*)$ se montre simplement en constatant que $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2}$, quelque soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.$\Big]$

Pour $n = 1$, on a $\det_1 = id$, qui est continue. On suppose que $\det_{n-1}$ est continue et on montre que $\det_n$ l'est. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. On a

$$\det_n(A) = a_{11} \det_{n-1}\big(P_{11}(A)\big) - \cdots + (-1)^n a_{1n} \det_{n-1}\big(P_{1n}(A)\big).$$

C'est une somme de fonctions continues, donc $\det_n$ est continue.

b) On voit que $G = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Si G était connexe, alors $\det(G) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ serait connexe, mais il est clair que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas connexe. D'où G n'est pas connexe.

c) On a que $E = \det^{-1}([-1,1])$, donc E est l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue. De plus, avec la matrice $A^{(m)} = (a_{ij}^{(m)})$ définie par

$$a_{ij}^{(m)} = \begin{cases} m, & \text{si } i = j = 1, \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases}$$

on voit que $\det(A^{(m)}) = 0$, car A est triangulaire supérieure et il y a au moins un zéro sur la diagonale de A, donc $A^{(m)} \in E$. Par contre, pour tout $R > 0$, la matrice $A^{(m)}$ n'est pas dans $B(0,R)$ si $m > R$. Il suit que G n'est pas borné, donc n'est pas compact.

Question 4. (10pts) Soit (X, d) un espace métrique. Soit (f_n) une suite de fonctions de $X \to \mathbb{R}$ et $f\colon X \to \mathbb{R}$ une autre fonction. On fait les hypothèses suivantes :

i) X est compact;

ii) f_n (pour tout n) et f sont continues sur X;

iii) $f_n \to f$ simplement sur X;

iv) (f_n) est croissante, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$, on a $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

Le but est de montrer qu'alors, $f_n \to f$ uniformément[Note 2] sur X.

a) Soit $\varepsilon > 0$. On pose

$$F_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Montrer que F_n est fermé dans X.

b) Montrer que $F_n \downarrow \emptyset$ (voir note 1). Déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F_N = \emptyset$.

c) Déduire que $f_n \to f$ uniformément sur X.

Solution. a) On pose $g(x) := |f_n(x) - f(x)|$. C'est une fonction continue, puisque f_n, f et la valeur absolue sont continues. De plus, on voit que

$$F_n = g^{-1}([\varepsilon, \infty)) = \{x \in X \mid g(x) \geq \varepsilon\}.$$

Puisque $[\varepsilon, \infty)$ est fermé dans $\mathbb{R}$, il suit que F_n est fermé dans X.

b) Par *iv)*, on a $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f(x)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f(x) - f_1(x) \geq f(x) - f_2(x) \geq \cdots \geq f(x) - f_n(x) \geq \cdots \geq 0.$$

Il suit que pour $\varepsilon > 0$ et $x \in F_{n+1}$, on a

$$f(x) - f_n(x) \geq f(x) - f_{n+1}(x) \geq \varepsilon,$$

donc $x \in F_n$. On conclut que $F_n \supseteq F_{n+1}$.

Ensuite, si $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$, alors

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Or, puisque $f_n(x) \to f(x)$ lorsque $n \to \infty$, cela est impossible. Il suit que l'intersection doit être vide.

Par le numéro 2b) de l'examen, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F_N = \emptyset$.

[Note 2] Rappel : $f_n \to f$ uniformément sur X signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in X$, on a $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

c) Pour $n \geq N$, on a $F_n = \emptyset$. En prenant le complément, on obtient

$$X = F_n^c = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}, \quad \text{pour tout } n \geq N,$$

ce qui signifie que pour tout $x \in X$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{pour tout } n \geq N,$$

d'où $f_n \to f$ uniformément sur X.