Examen intra 2

Analyse 3

MAT2100

L'examen dure 1h50. **Justifiez toutes vos réponses** (même les questions courtes). Il est sur 30 points. Si les points bonus font dépasser le total au-delà de 30, alors les points excédentaires seront ignorés.

Enseignant : Jonathan Godin
Session : H22

Questions courtes.
N'oubliez pas de justifier.

Question 1. (4pts) Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $f, g\colon X \to Y$ deux fonctions continues. Montrer que $E = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ est fermé.

Bonus. (3pts) L'ensemble $H = \{y \in Y \mid \exists x \in X, f(x) = g(x) = y\}$ est-il fermé ?

Question 2. (3pts) Soit (X, d) un espace métrique connexe. Que peut-on dire de $f\colon X \to \mathbb{Q}$, si f est continue ?

Question 3. (3pts) La sphère unité $\partial B(\vec{0}, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$ est-elle homéomorphe au plan $\mathbb{R}^2$?

Questions longues.

Question 4. (10pts) Soit (X, d) et (Z, d'') deux espaces métriques et (Y, d') un espace métrique compact. Soit $f\colon X \to Y$ une fonction et soit $g\colon Y \to Z$ une fonction injective et continue. On pose $h = g \circ f\colon X \to Z$. Montrer que f est uniformément continue si et seulement si h est uniformément continue.
Remarque. Vous pouvez tenir pour acquis que la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.
Indice. Rappelez-vous que g est injective si et seulement si elle possède un inverse à gauche ($k \circ g = id$ pour une certaine k).

Question 5. (10pts) Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et soit $f\colon X \to Y$ une fonction continue. Montrer que si X est connexe, alors $G = \{(x, f(x)) : x \in X\}$, le graphe de f, est connexe dans $(X \times Y, d_2)$, où

$$d_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \Big\|\Big(d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\Big)\Big\|_2 = \sqrt{d(x_1, d_2)^2 + d'(y_1, y_2)^2}.$$