Examen intra 2

Analyse 3

MAT2100

L'examen dure 1h50. **Justifiez toutes vos réponses** (même les questions courtes). Il est sur 30 points. Si les points bonus font dépasser le total au-delà de 30, alors les points excédentaires seront ignorés.

Enseignant : Jonathan Godin
Session : H22

Questions courtes.
N'oubliez pas de justifier.

Question 1. (4pts) Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $f, g\colon X \to Y$ deux fonctions continues. Montrer que $E = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ est fermé.

Solution. Soit (x_n) une suite de E qui converge vers $x \in X$. On a donc $f(x_n) = g(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si on laisse $n \to \infty$, alors on obtient $f(x) = g(x)$, d'où $x \in E$ et E est fermé.

Bonus. (3pts) L'ensemble $H = \{y \in Y \mid \exists x \in X, f(x) = g(x) = y\}$ est-il fermé ?

Question 2. (3pts) Soit (X, d) un espace métrique connexe. Que peut-on dire de $f\colon X \to \mathbb{Q}$, si f est continue ?

Solution. f est constante. En effet, $f(X)$ est connexe et comme $\mathbb{Q}$ est totalement disconnexe, il suit que $f(X)$ est un singleton.

Question 3. (3pts) La sphère unité $\partial B(\vec{0}, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$ est-elle homéomorphe au plan $\mathbb{R}^2$?

Solution. Non, car $\partial B(\vec{0}, 1)$ est compact, mais $\mathbb{R}^3$ ne l'est pas et la compacité est une propriété topologique.

Questions longues.

Question 4. (10pts) Soit (X, d) et (Z, d'') deux espaces métriques et (Y, d') un espace métrique compact. Soit $f\colon X \to Y$ une fonction et soit $g\colon Y \to Z$ une fonction injective et continue. On pose $h = g \circ f\colon X \to Z$. Montrer que f est uniformément continue si et seulement si h est uniformément continue.
Remarque. Vous pouvez tenir pour acquis que la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Indice. Rappelez-vous que g est injective si et seulement si elle possède un inverse à gauche ($k \circ g = id$ pour une certaine k).

Solution. Puisque Y est compact et que g est continue, il suit que g est uniformément continue.

$\Rightarrow$) Comme f et g sont uniformément continues, il est immédiat que h est uniformément continue, en vertu de la remarque.

$\Leftarrow$) On sait que $g(Y)$ est compact. De plus, $g\colon Y \to g(Y)$ est surjective et donc, avec l'hypothèse, bijective. Ainsi, g est inversible. Son inverse, g^{-1}, est continue, puisque chaque $F \subseteq Y$ fermé est compact, donc $(g^{-1})^{-1}(F) = g(F)$ est compact et, en particulier, fermé. Puisque $g(Y)$ est compact, on conclut que $g^{-1}\colon g(Y) \to Y$ est uniformément continue.

Enfin, on a $f = g^{-1} \circ h$, qui est la composée de deux fonctions uniformément continues.

Question 5. (10pts) Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et soit $f\colon X \to Y$ une fonction continue. Montrer que si X est connexe, alors $G = \big\{\big(x, f(x)\big) : x \in X\big\}$, le graphe de f, est connexe dans $(X \times Y, d_2)$, où

$$d_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \Big\|\Big(d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\Big)\Big\|_2 = \sqrt{d(x_1, d_2)^2 + d'(y_1, y_2)^2}.$$

Solution. Soit $F\colon X \to X \times Y$ définie par $F(x) = \big(x, f(x)\big)$. C'est une fonction continue, car pour $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, il existe $\delta > 0$ tel que si $d(x, y) < \delta$, alors $d'\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$ et donc pour y tel que $d(x, y) < \min\{\delta, \varepsilon\}$, on a

$$d_2\big(F(x), F(y)\big) = \sqrt{d(x, y)^2 + d'\big(f(x), f(y)\big)^2} < \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} = \sqrt{2}\varepsilon.$$

Comme $G = F(X)$ et X est connexe, on conclut que G est connexe.