Examen final

Analyse 3

MAT2100

L'examen dure 2h50. **Justifiez toutes vos réponses** (même les questions courtes). Il est sur 40 points. Si les points bonus font dépasser le total au-delà de 40, alors les points excédentaires seront ignorés.

Enseignant : Jonathan Godin
Session : H22

Questions courtes.
N'oubliez pas de justifier.

Question 1. (4pts) Soit $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que si f est une contraction, alors g possède un point fixe.

Question 2. (4pts) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1. Montrer que si $f'(x)$ est inversible pour tout $x \in U$, alors $f(U)$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

Question 3. (4pts) Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace normé et (v_n) une suite de V. On pose $s = \sum_{n\geq 1} v_n$. Montrer que si V est complet et si $\sum_{n\geq 1} \|v_n\|$ converge dans $\mathbb{R}$, alors s converge dans $(V, \|\cdot\|)$.

Bonus. (3pts) Soit $C = (0,1)^n$ le cube unité ouvert dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que $f\big(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\big) = b \in \mathbb{R}^n$ et qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|^2$ pour tout $x, y \in C$. Montrer que $f(x) = b$ pour tout $x \in C$.

Questions longues.

Question 4. (9pts) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^1 et $a, b \in U$ deux points. Soit $\gamma\colon [0,1] \to U$ une courbe de classe C^1 joignant a à b (c'est-à-dire $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$). Montrer que si $\|f'\big(\gamma(t)\big)\| \leq M$ pour tout $t \in [0,1]$, alors on a $\|f(b) - f(a)\| \leq ML(\gamma)$, où $L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t$.
Indice. Posez $g(t) = \big(f(b) - f(a)\big)^T f\big(\gamma(t)\big)$. (Ici, l'« exposant » T signifie le vecteur transposé.)

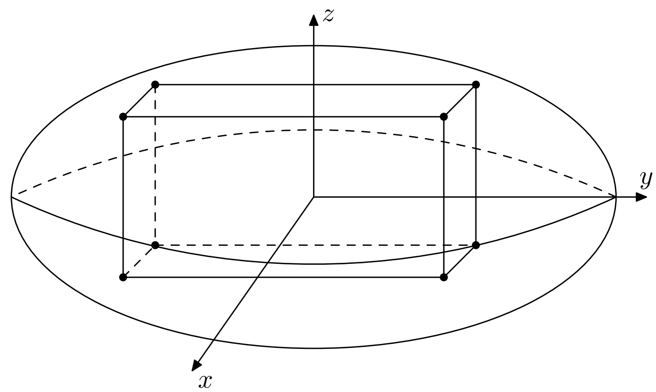
Suite au verso

Question 5. (9pts) Montrer que le plus grand volume atteint par un parallélépipède rectangle parallèle aux axes qui puisse être inscrit dans l'ellipsoïde E d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

est $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$, où $0 < c < b < a$.

Rappel. Un parallélépipède rectangle est un polyèdre à six faces dont tous les angles sont droits. Il est parallèle aux axes si chacune de ses arrêtes est parralèle à l'axe des x, des y ou des z.



Question 6. (10pts) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soit S la surface $S := \{z \in \mathbb{R}^n \mid f(z) = 0\}$. On suppose qu'il existe $a \in S$ tel que $f'(a) \neq 0$. Montrer que si $u \in \mathbb{R}^n$ vérifie $f'(a)u = 0$, alors il existe $r > 0$ et une courbe $\gamma\colon (-r, r) \to S$ de classe C^1 telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = u$.

Suggestion. Si $z = (z_1, \ldots, z_n)$, arguez que SPDG, $\frac{\partial f}{\partial z_n}(a) \neq 0$ et utilisez la notation suivante : $z = (x, y)$, $a = (b, c)$, $u = (v, w)$, où $x, b, v \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $y, c, w \in \mathbb{R}$.