Calcul 2

Surfaces

1. Surfaces paramétrées

Exercice 1. Identifier à quelle surface chacune des fonctions suivantes correspond.

a) $\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ 3-v \\ 1+4u+5v \end{pmatrix}$ b) $\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 \\ u\cos v \\ u\sin v \end{pmatrix}$

c) $f(s,t) = \begin{pmatrix} s\cos t \\ s\sin t \\ s \end{pmatrix}$ d) $g(s,t) = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ s \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad s \in [-1,1]$

Solution. a) Un plan b) Un paraboloïde autour de l'axe des x c) Un cône autour de l'axe des z d) Un cylindre en forme d'ellipse autour de l'axe des y

Exercice 2. Paramétrer les surfaces suivantes.

a) Le plan passant par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Le plan tangent à la sphère de rayon 1 centré à l'origine au point $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

c) La sphère de rayon 1 passant par $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) Le graphe de $f(x,y) = x^2 + y$.

e) Le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$.

Solution. c) On a l'équation $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = 1$, où $a,b,c \in \mathbb{R}$ sont à déterminer. On développe les carrés

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 + z^2 - 2cz + c^2 = 1.$$

On obtient les trois équations suivantes à partir des trois points donnés dans l'énoncé :

$$\begin{cases} 4 - 4a + a^2 + 1 + 2b + b^2 + c^2 = 1 \\ 1 - 2a + a^2 + 1 + 2b + b^2 + 1 - 2c + c^2 = 1 \\ 1 - 2a + a^2 + b^2 + c^2 = 1. \end{cases}$$

En soustrayant l'équation 2 de l'équation 1 et l'équation 2 de l'équation 3, on obtient

$$\begin{cases} 3 - 2a - 1 + 2c = 0 \\ -1 - 2b - 1 + 2c = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a - c = 1 \\ -b + c = 1 \end{cases}$$

Ainsi, on a $c = a - 1$ et $b = c - 1 = a - 2$. On remplace dans la troisième équation :

$$\begin{aligned} 1 - 2a + a^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - 2a + a^2 + a^2 - 4a + 4 + a^2 - 2a + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 3a^2 - 8a + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (3a-5)(a-1) = 0 \end{aligned}$$

Il y a deux possibilités : $a_1 = \frac{5}{3}$ et $a_2 = 1$

Exercice 3. Associer chaque paramétrage à la bonne surface.

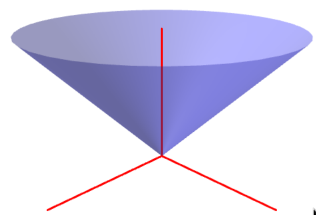
1. $f(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ v \end{pmatrix}$

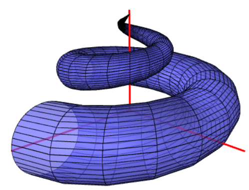
2. $f(u,v) = \begin{pmatrix} uv^2 \\ u^2 v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}$

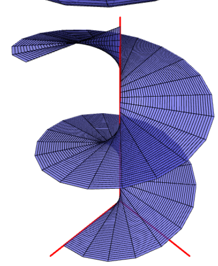
3. $f(u,v) = \begin{pmatrix} u^3 - u \\ v^2 \\ u^2 \end{pmatrix}$

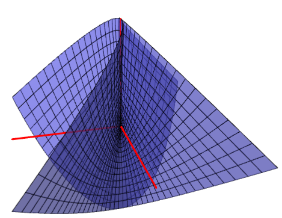
4. $f(u,v) = \begin{pmatrix} (1-u)(3+\cos v)\cos(4\pi u) \\ (1-u)(3+\cos v)\sin(4\pi u) \\ 3u + (1-u)\sin v \end{pmatrix}$

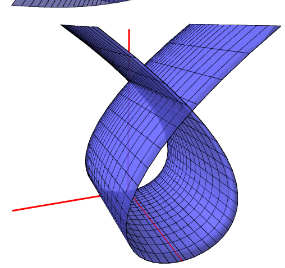
5. $f(u,v) = \begin{pmatrix} \cos^3 u \sin^3 v \\ \sin^3 u \cos^3 v \\ \sin^3 v \end{pmatrix}$

a) 

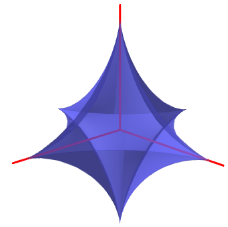
b) 

c) 

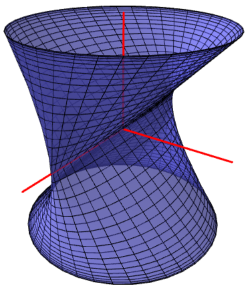
d) 

e) 

6. $f(u,v) = \begin{pmatrix} \sin u \\ \cos u \sin v \\ \sin v \end{pmatrix}$

f) 

7. $f(u,v) = \begin{pmatrix} v\cos u \\ v \sin u \\ v \end{pmatrix}$

g) 

Solution. 1. c) 2. d) 3. e) 4. b) 5. f) 6. g) 7. a)

Exercice 4. Paramétrer les surfaces déterminées par les équations algébriques suivantes.

a) $x + 3y + z = 1$

b) $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$

c) $8x^2 - 4y^2 = z$

d) $x^3 + y^2 + z = 0$

Solution. a) On peut utiliser un paramétrage de graphe. On isole l'une des variables ; on a le choix, prenons z. On a $\Gamma(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x - 3y \end{pmatrix}$, avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) On utilise les coordonnées polaires en xy :

$$\Sigma(r,\theta) = \begin{pmatrix} 2r\cos\theta \\ 3r\sin\theta \\ r^2 \end{pmatrix}, \quad (r,\theta) \in [0,\infty) \times [0,2\pi).$$

On peut aussi paramétrer la surface comme un graphe

$$\Gamma(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in [0,\infty)^2.$$

c) On peut paramétrer comme un graphe de fonction :

$$\Gamma(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 8x^2 - 4y^2 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi utiliser les coordonnées hyperboliques :

$$\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} v\cosh u \\ 2v\sinh u \\ 8v^2 \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 5. Paramétrer les parties de surfaces suivantes. Bien identiquer le domaine des paramètres.

a) La partie de l'hyperboloïde d'équation $4x^2 - 4y^2 - z^2 = 4$ situé devant le plan yz ($x \geq 0$).

b) La partie de l'ellipsoïde $x^2 + 2y^2 = 1$ dans les octants* I, II, III et IV.

c) La partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ située au-dessus du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

d) La partie du plan $z = x + 3$ située à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 1$.

Solution. a) Puisque $x \geq 0$, on peut isoler cette variable par $x = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4y^2 + z^2}$, ce qui donne le paramétrage de graphe

$$\Gamma(y, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4y^2 + z^2} \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2.$$

c) On utilise les coordonnées sphériques

$$\Sigma(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Pour être au-dessus du cylindre, il faut $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$. Si on porte notre paramétrage dans l'inéquation, on trouve $\sin\varphi \geq \sqrt{\cos^2\varphi} = |\cos\varphi| = \cos\varphi$. (On peut enlever les valeurs absolues puisque pour $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos\varphi \geq 0$.) Pour $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin\varphi \geq \cos\varphi$ lorsque $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ (il suffit de regarder le cercle trigonométrique pour le voir). Ainsi, la partie de sphère est paramétrée par Σ, avec $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 6. *Surface de révolution.* Soit une courbe $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ contenue dans le plan xy, c'est-à-dire qu'elle est de la forme

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit la matrice de rotation R_θ d'une rotation autour de l'axe des y d'un angle θ tournant dans le sens positif (règle de la main droite)

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

* Rappel : les octants sont les huits régions de l'espace suivants

I : $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$	III : $x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0$	V : $x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0$	VII : $x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0$
II : $x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0$	IV : $x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0$	VI : $x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0$	VIII : $x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0$

La *surface de révolution* obtenue par la rotation de γ autour de l'axe des y est paramétrée par

$$\Sigma(\theta,t) = R_\theta\big(\gamma(t)\big) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t)\cos\theta \\ \gamma_2(t) \\ -\gamma_1(t)\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Paramétrer les surfaces de révolution obtenues des courbes suivantes par la rotation autour de l'axe des y. Faire une esquisse de la surface.

a) $y = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$

b) $y = x^3 - x^2 + 1$

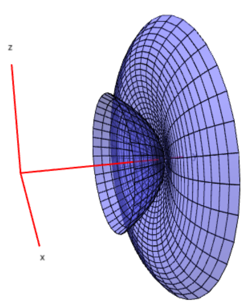
c) Le cercle de rayon 1 centré en $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solution. b) On paramétrise la courbe par

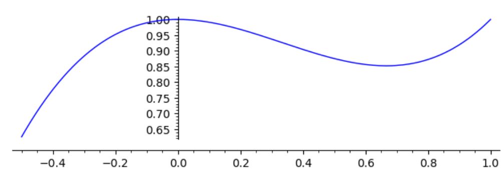
$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^3 - x^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

La surface est paramétrée par

$$\Gamma(\theta,x) = \begin{pmatrix} x\cos\theta \\ x^3 - x^2 + 1 \\ -x\sin\theta \end{pmatrix}$$



Surface de révolution



Courbe dans le plan xy

2. Vecteur normal et plan tangent

Exercice 7. Calculer le vecteur normal et le vecteur normal unitaire des surfaces suivantes.

a) $\Sigma(s,t) = \begin{pmatrix} s+t \\ s-t \\ st \end{pmatrix}$

b) $\Sigma(s,t) = \begin{pmatrix} t\cos s \\ t\sin s \\ t \end{pmatrix}$

c) $\Sigma(s,t) = \begin{pmatrix} s^2e^t \\ 1 \\ e^s \end{pmatrix}$

d) $\Sigma(s,t) = \begin{pmatrix} s^2+st+t^2 \\ t^2-s^2 \\ s^2-t^2 \end{pmatrix}$

Solution. a) $\vec{N}(s,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}(s,t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{N}(s,t) = \begin{pmatrix} t\cos s \\ t\sin s \\ -t \end{pmatrix}$ et $\vec{n}(s,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) On a

$$\mathrm{d}\Sigma(s,t) = \begin{pmatrix} 2se^t & s^2e^t \\ 0 & 0 \\ e^s & 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur normal est

$$\vec{N}(s,t) = T_s \times T_t = \begin{pmatrix} 0 \\ s^2e^{s+t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le vector normal unitaire est

$$\vec{n}(s,t) = \frac{\vec{N}(s,t)}{\|\vec{N}(s,t)\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Pour chaque surface suivante, trouver l'équation du plan tangent à la surface au point indiqué.

a) $\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ 3u^2 \\ u-v \end{pmatrix}$, au point $(2,3,0)^T$.

b) $\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u^2+1 \\ v^3+1 \\ u+v \end{pmatrix}$, au point $(5,2,3)^T$.

c) $\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ v \end{pmatrix}$, au point $\Sigma(1,\frac{\pi}{3})$.

Solution. a) Pour obtenir l'équation cartésienne, on doit calculer le vecteur normal. On omet les caluls ; on trouve

$$\vec{N}(u,v) = \begin{pmatrix} -6u \\ 2 \\ -6u \end{pmatrix}.$$

On doit trouver les paramètres (u,v) pour lesquels $\Sigma(u,v) = (2,3,0)^T$. On a

$$\begin{pmatrix} u+v \\ 3u^2 \\ u-v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La troisième composante donne $u = v$ et la première, $u = 1$. On a donc $u = v = 1$. Ainsi, le vecteur normal est

$$\vec{N}(1,1) = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Enfin, le point $(x, y, z)^T$ est sur le plan tangent si et seulement si

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 0.$$

L'équation du plan est donc $-6(x-2) + 2(y-3) - 6z = 0$.

Exercice 9. Ruban de Möbius. Un *ruban de Möbius* est une surface qui décrit un ruban qui a été tordu une fois et recollé pour former une boucle, de sorte qu'il n'y ait qu'une seule face. On peut obtenir une telle surface en prenant un segment de droite et le faisant tourner le long d'un cercle dans le plan xy tout en lui faisant faire un demi-tour sur lui-même. Ceci s'obtient symboliquement par

$$\Sigma(\theta, t) = R_{\theta,z} \circ T_{e_2} \circ R_{\frac{\theta}{2},x} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{segment de droite}},$$

où $T_{\vec{v}}$ est la translation par $\vec{v}$ et $e_2 = (0, 1, 0)^T$. Voir la figure 1. Ainsi, un paramétrage possible est donnée par

$$\Sigma(\theta, t) = \begin{pmatrix} -t\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta) - \sin(\theta) \\ t\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\theta) + \cos(\theta) \\ t\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \qquad (\theta, t) \in [0, 2\pi] \times \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right].$$

Voir la figure 2.

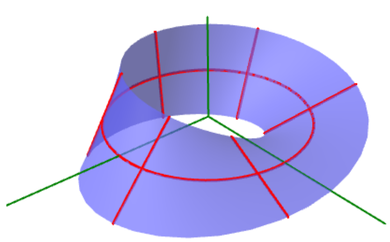


Figure 1

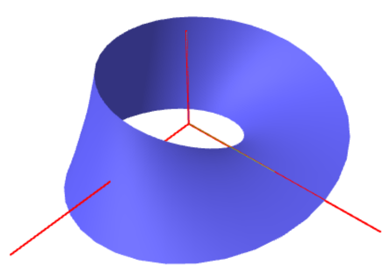


Figure 2

a) Vérifier que $\Sigma(0, t) = \Sigma(2\pi, t)$ pour tout $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

b) Après de fastidieux calculs (ou à l'aide d'un logiciel comme Sage ou Mathematica), on trouve le vecteur normal

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\cos(\theta) - \frac{1}{2}\left[t\cos(\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2t\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta) + 2\sin(\theta)\right]\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\frac{1}{2}t\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\sin(\theta) + \frac{1}{2}\left[2t\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\theta) - t\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta) + 2\cos(\theta)\right]\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\frac{1}{2}\left[2t\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\theta) - t\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta) + 2\cos(\theta)\right]\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\theta) \\ \qquad - \frac{1}{2}\left[t\cos(\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2t\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta) + 2\sin(\theta)\right]\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Vérifier que $\vec{N}(0,0) \neq \vec{N}(2\pi,0)$. Qu'est-ce que cela représente géométriquement ? *Truc.* Commencez par écrire le vecteur $\vec{N}(\theta,0)$, qui est beaucoup plus simple.

3. Aire d'une surface

Exercice 10. Calculer l'aire des surfaces suivantes.

a) La partie du plan $3x + 2y + z = 6$ située dans le premier octant

b) $f(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ 2-3u \\ 1+u-v \end{pmatrix}$, $(u,v) \in [0,2] \times [-1,1]$

c) La partie du cône $z = \sqrt{x^2+y^2}$ située à l'intérieur du cylindre $x^2 + z^2 = 1$
Remarque. On peut utiliser $\int \frac{d\theta}{1+\cos^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan(\theta)}{\sqrt{2}}\right)$, que l'on obtient en multipliant l'intégrande au numérateur et au dénumarateur par $\sec^2\theta$, etc.

d) La partie de la surface $z = 4 - 2x^2 + y$ située au-dessus du triangle de somets $(0,0,0)^T$, $(1,0,0)^T$ et $(1,1,0)^T$ dans le plan xy.

e) La partie du paraboloïde $y = x^2 + z^2$ située à l'intérieur du cylindre $x^2 + z^2 = 16$.

f) La surface paramétrée

$$\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 \\ uv \\ \frac{1}{2}v^2 \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in [0,1] \times [0,2].$$

g) La partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ située à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 1$.

Solution. a) Le plan est dans le premier octant si $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$. On peut paramétrer le plan par

$$\Sigma(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 6-3x-2y \end{pmatrix}.$$

Pour être dans le premier octan, il faut $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $6 - 3x - 2y \geq 0$. La dernière inégalité devient $6 \geq 3x + 2y$. Ainsi, le domaine de Σ est la région $x \in [0,2]$ et $0 \leq 2y \leq 6 - 3x$.

On a

$$\mathrm{d}\Sigma(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{N}(x,y) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il suit que $\|\vec{N}(x,y)\| = \sqrt{14}$.

Enfin, l'aire est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aire}(S) = \int_S \mathrm{d}S &= \int_0^2 \int_0^{-\frac{3}{2}x+3} \sqrt{14}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{14}\int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x+3\right)\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{14}\left[-\frac{3}{4}x^2+3x\right]_0^2 \\
&= \sqrt{14}\,(-3+6) = 3\sqrt{14}.
\end{aligned}$$

c) On utilise les coordonnées polaires pour paramétrer le cône, car il sera plus simple de déterminer le domaine des paramètres. On a

$$\Sigma(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ r \end{pmatrix}.$$

Pour paramétrer seulement la partie dans le cylindre, on a la restriction $r^2\cos^2\theta + r^2 \leq 1$, donc $r \leq \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+1}}$.

Ensuite, on a

$$\mathrm{d}\Sigma(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{N}(r,\theta) = \begin{pmatrix} -r\cos\theta \\ -r\sin\theta \\ r \end{pmatrix}.$$

Il suit que $\|\vec{N}\| = \sqrt{2}r$.

Pour l'aire, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aire}(S) &= \int_S \mathrm{d}S \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+1}}} \sqrt{2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+1}}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta + 1} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{4\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta + 1} \\
&= 2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan\theta}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}
$$

On justifie la ligne $(*)$ comme suit :

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta + 1} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta + 1} && (\text{avec } \theta \mapsto \theta - \pi) \\
&= 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta + 1} && (\text{car l'intégrande est pair}) \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta + 1} && (\text{avec } \theta \mapsto \theta - \tfrac{\pi}{2}) \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta + 1} && (\text{car l'intégrande est pair}) \\
&= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta + 1} && (\text{avec } \theta \mapsto \theta - \tfrac{\pi}{2}) \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta + 1}. && (\text{avec } \theta \mapsto -\theta)
\end{aligned}
$$

Exercice 11. Déduire une formule pour les surfaces de révolution obtenue par la rotation d'une courbe dans le plan xy autour de l'axe des x et par la rotation d'une courbe dans le plan xz (ou yz) autour de l'axe des z.

Solution. On fait le cas d'une courbe dans le plan xy autour de l'axe des x. Une telle courbe a la forme

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de rotation autour de l'axe des x a la forme

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Le paramétrage de la surface est alors

$$\Sigma(t,\theta)=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\cos\theta\\ y(t)\sin\theta\end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne de Σ et le vecteur normal sont

$$\mathrm{d}\Sigma(t,\theta)=\begin{pmatrix} x'(t) & 0\\ y'(t)\cos\theta & -y(t)\sin\theta\\ y'(t)\sin\theta & y(t)\cos\theta\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{N}(t,\theta)=\begin{pmatrix} y(t)y'(t)\\ -x'(t)y(t)\cos\theta\\ -x'(t)y(t)\sin\theta\end{pmatrix}.$$

On a $\|\vec{N}(t,\theta)\|^2=y(t)^2y'(t)^2+x'(t)^2y(t)^2=y(t)^2\big(x'(t)^2+y'(t)^2\big)$. Finalement, on obtient

$$\text{Aire}(S)=\int_S \mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\int_a^b \|\vec{N}(t,\theta)\|\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta=2\pi\int_a^b |y(t)|\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\ \mathrm{d}t.$$

On peut réécrire cette intégrale en $2\pi\int_\gamma |y|\mathrm{d}s$.

On remarque que dans le cas où γ est le graphe d'une fonction $y=f(x)$, on retombe sur la même formule qui est vue en calcul intégral, car dans cas, $x'(t)=1$.

Dans le cas où la rotation est faite autour de l'axe des y, on obtient $2\pi\int_\gamma |x|\mathrm{d}s$.

Exercice 12. Calculer l'aire des surfaces suivantes.

a) Le graphe de $z=xy$ défini sur le domaine $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1\}$.

b) La surface de révolution obtenue par la rotation du graphe de $y=x^2$, $x\in[0,1]$, autour de l'axe des y.

c) La surface de révolution obtenue par la rotation de l'astroïde $\begin{pmatrix}\cos^3 t\\ \sin^3 t\end{pmatrix}$, $t\in\big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big]$ autour de l'axe des y.

Solution. b) En utilisant la formule du numéro 11 avec le paramétrage de graphe $\gamma(x)=\begin{pmatrix}x\\ x^2\end{pmatrix}$, $x\in[0,1]$, on trouve

$$\text{Aire}(S)=2\pi\int_\gamma |x|\mathrm{d}s=2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}\big(5\sqrt{5}-1\big).$$

(On peut enlever la valeur absolue puisque $0\leq x\leq 1$.)

c) Pour $t\in\big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big]$, on sait que $0\leq\cos t\leq 1$, donc la courbe de l'astroïde se trouve dans les cadrants I et IV. Ainsi, il faut faire une rotation de 2π autour de l'axe des y pour obtenir la surface au complet. (On le précise, car si $t\in[0,2\pi]$, alors il suffit d'une rotation de π pour obtenir la surface au complet.)

On a

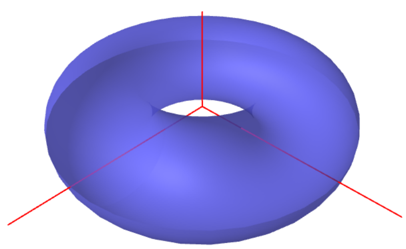
$$\gamma'(t)=\begin{pmatrix}-3\cos^2 t\sin t\\ 3\sin^2 t\cos t\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned}\|\gamma'(t)\|^2 &=9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t\cos^2 t\\ &=9\cos^2 t\sin^2 t.\end{aligned}$$

Il suit que $\|\gamma'(t)\| = 3|\sin t \cos t|$.

En utilisant la formule du numéro 11, on trouve

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(S) &= 2\pi \int_\gamma |x| \mathrm{d}s \\
&= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos^3 t| 3 |\sin t \cos t| \mathrm{d}t \\
&= 12\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos^4 t \sin t| \mathrm{d}t && \text{(car l'intégrande est pair)} \\
&= 12\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t \, \mathrm{d}t && \text{(car } \sin t \geq 0 \text{ et } \cos t \geq 0\text{)} \\
&= 12\pi \int_0^1 u^4 \mathrm{d}u && \text{(avec } u = \cos t\text{)} \\
&= 12\pi \frac{u^5}{5}\Big|_0^1 \\
&= \frac{12\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Exercice 13. *Tore*. La surface du 6c) s'appelle un *tore*. Montrer que ce tore est une surface régulière. Utiliser la formule du numéro 11 pour montrer que l'aire du tore est $8\pi^2$.



Solution. Le cercle de rayon 1 centré en $(2,0)^T$ est paramétré par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t + 2 \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \|\gamma'(t)\| = 1.$$

Par la formule du numéro 11, on a

$$\text{Aire(tore)} = 2\pi \int_\gamma |x| \mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^{2\pi} |\cos t + 2| \mathrm{d}t \\
&= 2\pi \int_0^{2\pi} (\cos t + 2) \mathrm{d}t && (\text{car } \cos t + 2 \geq 0) \\
&= 2\pi(0 + 4\pi) \\
&= 8\pi^2.
\end{aligned}
$$

4. Surfaces équivalentes

Exercice 14. Paramétrer l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ de deux façons différentes.

Solution. La façon en terme de méridiens et de parallèles est

$$
\Gamma(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos\theta\cos\varphi \\ 3\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times \big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big].
$$

Une autre façon assez classique est

$$
\Sigma(\theta, \eta) = \begin{pmatrix} 2\cos\theta\sin\eta \\ 3\sin\theta\sin\eta \\ \cos\eta \end{pmatrix}, \quad (\theta, \eta) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi].
$$

L'équivalence est simplement donnée par $(\theta, \eta) = \big(\theta, \varphi + \frac{\pi}{2}\big)$.

Exercice 15. Montrer que le paramétrage du tore suivant

$$
\Sigma(\theta, \varphi) = R_{\theta,y} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi + 2 \end{pmatrix}, \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi],
$$

est équivalent au paramétrage donné au 6c).

Exercice 16. Montrer que les deux surfaces suivantes ne sont pas C^1-équivalentes

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1(\theta, \varphi) &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big) \\
\text{et } \Sigma_2(\theta, \varphi) &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times \big[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big].
\end{aligned}
$$

Solution. On peut montrer que Σ_1 et Σ_2 n'ont pas la même trace. Le point $(0,0,1)^T$ est sur Σ_2, puisque $\Sigma_2(0,\frac{\pi}{2}) = (0,0,1)^T$. Or, ce point n'est pas sur Σ_1, puisqu'il faudrait $\sin\varphi = 1$, ce qui est impossible pour $\varphi \in \big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big)$.

Ainsi, il est impossible que Σ_1 et Σ_2 soient équivalentes, car autrement elles auraient la même trace.