Calcul 2

Surfaces

1. Surfaces paramétrées

Exercice 1. Identifier de quelle surface chacune des fonctions suivantes correspond.

a) $\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ 3-v \\ 1+4u+5v \end{pmatrix}$

b) $\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 \\ u\cos v \\ u \sin v \end{pmatrix}$

c) $f(s,t) = \begin{pmatrix} s\cos t \\ s\sin t \\ s \end{pmatrix}$

d) $g(s,t) = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ s \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad s \in [-1,1]$

Exercice 2. Paramétrer les surfaces suivantes.

a) Le plan passant par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Le plan tangent à la sphère de rayon 1 centré à l'origine au point $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

c) La sphère de rayon 1 passant par $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) Le graphe de $f(x,y) = x^2 + y$.

e) Le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$.

Exercice 3. Associer chaque paramétrage à la bonne surface.

1. $f(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ v \end{pmatrix}$

2. $f(u,v) = \begin{pmatrix} uv^2 \\ u^2v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}$

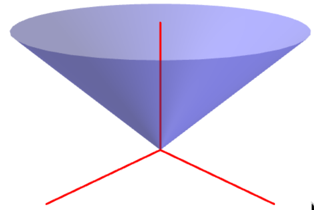
3. $f(u,v) = \begin{pmatrix} u^3 - u \\ v^2 \\ u^2 \end{pmatrix}$

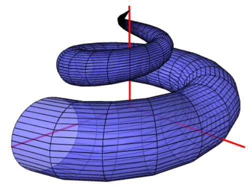
4. $f(u,v) = \begin{pmatrix} (1-u)(3+\cos v)\cos(4\pi u) \\ (1-u)(3+\cos v)\sin(4\pi u) \\ 3u + (1-u)\sin v \end{pmatrix}$

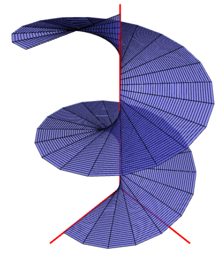
5. $f(u,v) = \begin{pmatrix} \cos^3 u \sin^3 v \\ \sin^3 u \cos^3 v \\ \sin^3 v \end{pmatrix}$

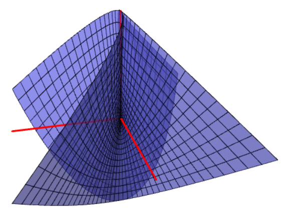
6. $f(u,v) = \begin{pmatrix} \sin u \\ \cos u \sin v \\ \sin v \end{pmatrix}$

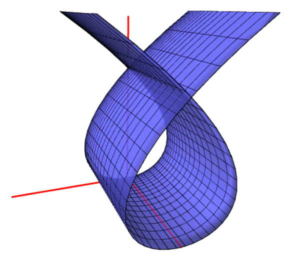
7. $f(u,v) = \begin{pmatrix} v\cos u \\ v\sin u \\ v \end{pmatrix}$

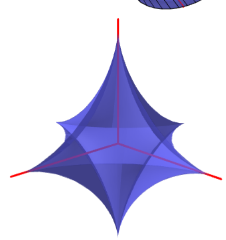
a) 

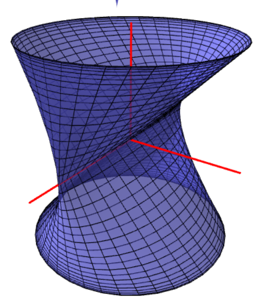
b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

Exercice 4. Paramétrer les surfaces déterminées par les équations algébriques suivantes.

a) $x + 3y + z = 1$

b) $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$

c) $8x^2 - 4y^2 = z$

d) $x^3 + y^2 + z = 0$

Indice pour le c). Rappelez-vous de l'identité $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$.

Exercice 5. Paramétrer les parties de surfaces suivantes. Bien identiquer le domaine des paramètres.

a) La partie de l'hyperboloïde d'équation $4x^2 - 4y^2 - z^2 = 4$ situé devant le plan yz ($x \geq 0$).

b) La partie de l'ellipsoïde $x^2 + 2y^2 = 1$ dans les octants* I, II, III et IV.

c) La partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ située au-dessus du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

d) La partie du plan $z = x + 3$ située à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 1$.

Exercice 6. *Surface de révolution.* Soit une courbe $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ contenue dans le plan xy, c'est-à-dire qu'elle est de la forme

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit la matrice de rotation R_θ d'une rotation autour de l'axe des y d'un angle θ tournant dans le sens positif (règle de la main droite)

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

La *surface de révolution* obtenue par la rotation de γ autour de l'axe des y est paramétrée par

$$\Sigma(\theta, t) = R_\theta\big(\gamma(t)\big) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t)\cos\theta \\ \gamma_2(t) \\ -\gamma_1(t)\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Paramétrer les surfaces de révolution obtenues des courbes suivantes par la rotation autour de l'axe des y. Faire une esquisse de la surface.

a) $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$

b) $y = x^3 - x^2 + 1$

c) Le cercle de rayon 1 centré en $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

---

* Rappel : les octants sont les huits régions de l'espace suivants

I : $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$	III : $x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0$	V : $x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0$	VII : $x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0$
II : $x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0$	IV : $x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0$	VI : $x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0$	VIII : $x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0$

2. Vecteur normal et plan tangent

Exercice 7. Calculer le vecteur normal et le vecteur normal unitaire des surfaces suivantes.

a) $\Sigma(s,t) = \begin{pmatrix} s+t \\ s-t \\ st \end{pmatrix}$ b) $\Sigma(s,t) = \begin{pmatrix} t\cos s \\ t\sin s \\ t \end{pmatrix}$

c) $\Sigma(s,t) = \begin{pmatrix} s^2e^t \\ 1 \\ e^s \end{pmatrix}$ d) $\Sigma(s,t) = \begin{pmatrix} s^2+st+t^2 \\ t^2-s^2 \\ s^2-t^2 \end{pmatrix}$

Exercice 8. Pour chaque surface suivante, trouver l'équation du plan tangent à la surface au point indiqué.

a) $\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ 3u^2 \\ u-v \end{pmatrix}$, au point $(2,3,0)^T$.

b) $\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u^2+1 \\ v^3+1 \\ u+v \end{pmatrix}$, au point $(5,2,3)^T$.

c) $\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ v \end{pmatrix}$, au point $\Sigma(1,\frac{\pi}{3})$.

Exercice 9. Ruban de Möbius. Un *ruban de Möbius* est une surface qui décrit un ruban qui a été tordu une fois et recollé pour former une boucle, de sorte qu'il n'y ait qu'une seule face. On peut obtenir une telle surface en prenant un segment de droite et le faisant tourner le long d'un cercle dans le plan xy tout en lui faisant faire un demi-tour sur lui-même. Ceci s'obtient symboliquement par

$$\Sigma(\theta,t) = R_{\theta,z} \circ T_{e_2} \circ R_{\frac{\theta}{2},x} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{segment de droite}},$$

où $T_{\vec{v}}$ est la translation par $\vec{v}$ et $e_2 = (0,1,0)^T$. Voir la figure 1. Ainsi, un paramétrage possible est donnée par

$$\Sigma(\theta,t) = \begin{pmatrix} -t\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta) - \sin(\theta) \\ t\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\theta) + \cos(\theta) \\ t\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \qquad (\theta,t) \in [0,2\pi] \times \left[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right].$$

Voir la figure 2.

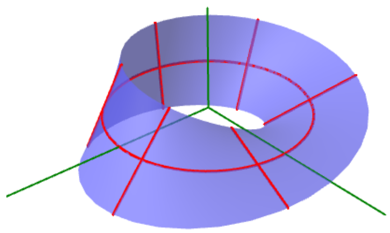


Figure 1

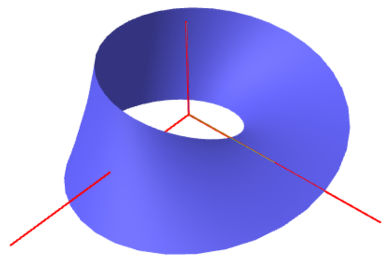


Figure 2

a) Vérifier que $\Sigma(0,t) = \Sigma(2\pi,t)$ pour tout $t \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

b) Après de fastidieux calculs (ou à l'aide d'un logiciel comme Sage ou Mathematica), on trouve le vecteur normal

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\cos(\theta) - \frac{1}{2}\left[t\cos(\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2t\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta) + 2\sin(\theta)\right]\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \\ -\frac{1}{2}t\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\sin(\theta) + \frac{1}{2}\left[2t\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\theta) - t\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta) + 2\cos(\theta)\right]\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \\ -\frac{1}{2}\left[2t\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\theta) - t\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta) + 2\cos(\theta)\right]\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\theta) \\ \qquad -\frac{1}{2}\left[t\cos(\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2t\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta) + 2\sin(\theta)\right]\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Vérifier que $\vec{N}(0,0) \neq \vec{N}(2\pi,0)$. Qu'est-ce que cela représente géométriquement ?
Truc. Commencez par écrire le vecteur $\vec{N}(\theta,0)$, qui est beaucoup plus simple.

3. Aire d'une surface

Exercice 10. Calculer l'aire des surfaces suivantes.

a) La partie du plan $3x + 2y + z = 6$ située dans le premier octant

b) $f(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ 2-3u \\ 1+u-v \end{pmatrix}$, $(u,v) \in [0,2] \times [-1,1]$

c) La partie du cône $z = \sqrt{x^2+y^2}$ située à l'intérieur du cylindre $x^2+z^2 = 1$
Remarque. On peut utiliser $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan(\theta)}{\sqrt{2}}\right)$, que l'on obtient en multipliant l'intégrande au numérateur et au dénumarateur par $\sec^2\theta$, etc.

d) La partie de la surface $z = 4 - 2x^2 + y$ située au-dessus du triangle de somets $(0,0,0)^T$, $(1,0,0)^T$ et $(1,1,0)^T$ dans le plan xy.

e) La partie du paraboloïde $y = x^2 + z^2$ située à l'intérieur du cylindre $x^2 + z^2 = 16$.

f) La surface paramétrée

$$\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 \\ uv \\ \frac{1}{2}v^2 \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in [0,1] \times [0,2].$$

g) La partie de la sphère $x^2+y^2+z^2 = 4$ située à l'intérieur du cylindre $x^2+y^2 = 1$.

Exercice 11. Déduire une formule pour les surfaces de révolution obtenue par la rotation d'une courbe dans le plan xy autour de l'axe des x et par la rotation d'une courbe dans le plan xz (ou yz) autour de l'axe des z.

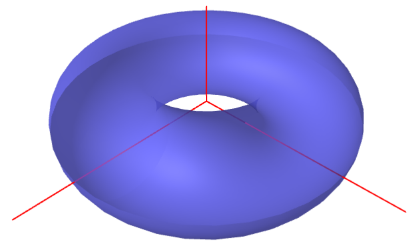
Exercice 12. Calculer l'aire des surfaces suivantes.

a) Le graphe de $z = xy$ défini sur le domaine $\{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$.

b) La surface de révolution obtenue par la rotation du graphe de $y = x^2$, $x \in [0,1]$, autour de l'axe des y.

c) La surface de révolution obtenue par la rotation de l'astroïde $\begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ autour de l'axe des y.

Exercice 13. *Tore*. La surface du 6c) s'appelle un *tore*. Montrer que ce tore est une surface régulière. Utiliser la formule du numéro 11 pour montrer que l'aire du tore est $8\pi^2$.



4. Surfaces équivalentes

Exercice 14. Paramétrer l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ de deux façons différentes.

Exercice 15. Montrer que le paramétrage du tore suivant

$$\Sigma(\theta, \varphi) = R_{\theta,y} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi + 2 \end{pmatrix}, \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi],$$

est équivalent au paramétrage donné au 6c).

Exercice 16. Montrer que les deux surfaces suivantes ne sont pas C^1-équivalentes

$$\Sigma_1(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{et } \Sigma_2(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right].$$