Calcul 2

Série 5

Exercice 1. Dire si les opérations suivantes sont permises (c'est-à-dire si elles sont bien définies). Soit $\vec{v}, \vec{w}, \vec{x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{a}, \vec{b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

a) $\vec{a} \bullet (\nabla \bullet \vec{b})$
b) $t \cdot (\nabla \times \vec{v})$
c) $\nabla \times \vec{v} \times \vec{w}$
d) $(\vec{v} \times \vec{w}) \bullet \vec{x}$
e) $(\vec{w} \bullet \vec{x}) \times \vec{v}$
f) $\nabla \times \vec{a} \bullet \vec{b}$
g) $\vec{a} \bullet \vec{x}$
h) $\vec{a} \times \operatorname{div} \vec{b}$
i) $\nabla \bullet (\nabla \times \vec{v})$

Solution.

a) Non
b) Oui
c) Oui
d) Oui
e) Non
f) Non
g) Non (a et x n'ont pas le même domaine)
h) Non
i) Oui

Exercice 2. Calculer les opérations suivantes.

a) $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{pmatrix}$
b) $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$
c) $\nabla \bullet \begin{pmatrix} xe^y \\ -e^y \\ \sin\left(e^{xy^2}\right) \end{pmatrix}$
d) $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} xze^y \\ x^2 \\ yz^2 \end{pmatrix}$
e) $\nabla \times \begin{pmatrix} x^2 \\ x\cos^2 z \\ y \sin^2 z \end{pmatrix}$

Solution. a) On a

$$\operatorname{rot} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0-y \\ -z+0 \\ 0-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}.$$

c) On a

$$\nabla \bullet \begin{pmatrix} xe^y \\ -e^y \\ \sin\left(e^{xy^2}\right) \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^y) + \frac{\partial}{\partial y}(-e^y) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\sin\left(e^{xy^2}\right)\right) = e^y - e^y + 0.$$

Exercice 3. Trouver un paramétrage des trajectoires suivantes et faire un dessin (sauf pour le e).

a) Le cercle de rayon 4 centré en $(0,0)$.
b) Le cercle de rayon 1 centré en $(1,-1)$.
c) La droite passant par les points $(1,0,0)^T$ et $(0,1,0)^T$.
d) La droite passant par $(2,1,0)^T$ et dont le vecteur directeur est $\vec{d} = (1,1,1)^T$.
e) L'image du cercle de rayon 1 centré en $(0,0)$ par la fonction $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - xy^3 - 2xy^2 \\ -y^3 + 2x^2y + x^2y \end{pmatrix}$.

Solution. b) L'équation de ce cercle est $(x-1)^2+(y+1)^2=1$. Comme la courbe

$$\gamma(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix},\qquad \theta\in[0,2\pi],$$

paramétrise un cercle centré en $(0,0)$ de rayon 1, il suffit de faire une translation de $(1,-1)$. On a donc

$$\alpha(\theta)=\gamma(\theta)+\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta+1\\ \sin\theta-1\end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que ceci est bon en remplaçant $x=\cos\theta+1$ et $y=\sin\theta-1$ dans l'équation de ce cercle.

c) Un vecteur directeur pour la droite est

$$\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Ainsi, un paramétrage sera

$$\gamma(t)=\vec{d}t+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad t\in\mathbb{R}.$$

(Il y a plusieurs réponses possibles.)

Exercice 4. Déterminer sur le domaine maximal dans $\mathbb{R}$ sur lequel fonction suivante peut être définie.

a) $f(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ $\qquad$ $f(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-t}}\\ \log(t+1)\end{pmatrix}$ $\qquad$ $f(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{1+t^2}\\ \tan t\end{pmatrix}$

Solution.

a) $\mathbb{R}$ $\qquad$ b) $(-1,\infty)\setminus\{1\}$ $\qquad$ c) $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n \mid n\in\mathbb{N}\right\}$

Exercice 5. Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{t\to 0^+}\begin{pmatrix}\sin t\\ t+1\\ \sqrt{t}\end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{t\to 1^+}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t}-1}\\ \frac{\log t}{1-t}\end{pmatrix}$ $\qquad$ c) $\lim\limits_{t\to\infty}\begin{pmatrix}\frac{\sin t}{t}\\ \frac{t^2+1}{2t^2-1}\end{pmatrix}$

Solution. c) On d'abord

$$0\leq\left|\frac{\sin t}{t}\right|\leq\frac{1}{t}$$

et comme $\frac{1}{t}\to 0$ lorsque $t\to\infty$, il suit que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin t}{t}=0.$$

On a ensuite

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+1}{2t^2-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{1}{t^2}}{2-\frac{1}{t^2}}=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}.$$

Comme les deux limites convergent, on obtient

$$\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix}\frac{\sin t}{t}\\ \frac{t^2+1}{2t^2-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Calculer les vecteurs tangents des courbes suivantes. Pour chaque courbe, dire si elle est régulière et tracer sa trajectoire.

a) $f(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ t\end{pmatrix}$

b) $f(t)=\begin{pmatrix}2\cos(-t)\\ 3\sin(-t)\end{pmatrix}$

c) $f(t)=\begin{pmatrix}t^2\\ t\end{pmatrix}$

d) $f(t)=\begin{pmatrix}t\\ \sqrt{1-t^2}\end{pmatrix}$, $t\in[-1,1]$

Solution. a) On a

$$f'(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 1\end{pmatrix}.$$

Comme la troisième composante est non nulle pour tout t, il suit que $f'(t)\neq\vec{0}$. De plus, la dérivée de f existe pour tout t. On peut donc conclure que f est régulière sur $\mathbb{R}$.

Le dessin de la courbe est une spirale qui tourne autour de l'axe des z.

b) On a

$$f'(t)=\begin{pmatrix}2\sin(-t)\\ -3\cos(-t)\end{pmatrix}.$$

Ensuite, on voit que

$$\|f'(t)\|^2=4\sin^2(-t)+9\cos^2(-t)=4+\cos^2(-t).$$

Cette quantité est non nulle, puisque $0\leq\cos^2(-t)\leq 1$. Si $\|f'(t)\|$ est non nulle, il suit que $f'(t)$ est également non nulle. (En effet, on a $\|f'(t)\|=0\iff f'(t)=\vec{0}$.) De plus, $f'(t)$ existe pour tout t, donc c'est une courbe régulière.

La trajectoire de f est une ellipse d'équation $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ si $t\in[0,2\pi]$.

Exercice 7. *Deltoïde.* Soit la courbe paramétrée par

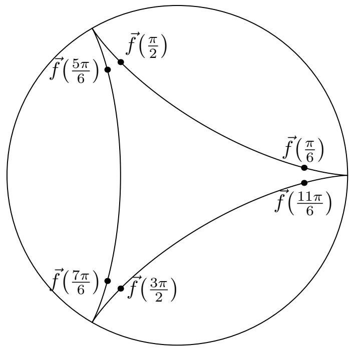
$$\vec{f}(t)=\begin{pmatrix}2\cos t+\cos(2t)\\ 2\sin t-\sin(2t)\end{pmatrix},$$

pour $t\in[0,2\pi]$.

a) Tracer un cercle de rayon 3. Évaluer $\vec{f}$ en $t=\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$ et en $t=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}$ et tracer ces points. Tenter de tracer le reste de la courbe.

b) Montrer que c'est une courbe fermée.

c) La courbe présente-t-elle des points de rebroussement? Des coins? Combien y en a-t-il de chacun, s'il y en a, et où se trouvent-ils dans le plan cartésien? La courbe est-elle régulière?

Solution. a) 

b) Il suffit de montrer que $f(0) = f(2\pi)$.

c) On a

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t - 2\sin(2t) \\ 2\cos t - 2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \|f'(t)\|^2 &= 4\sin^2 t + 8\sin t\sin(2t) + 4\sin^2(2t) + 4\cos^2 t - 8\cos t\cos(2t) + 4\cos^2(2t) \\ &= 8 - 8\cos(t+2t) \qquad \text{(car } \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b) \\ &= 8 - 8\cos(3t). \end{aligned}$$

On a $8 - 8\cos(3t) = 0$ si et seulement si $\cos(3t) = 1$, donc si et seulement si $3t = 2n\pi$, où $n \in \mathbb{N}$. Il suit que $t = \frac{2n\pi}{3}$. Dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, il y 0, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$. Ainsi, la courbe n'est pas régulière aux points

$$f(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \qquad f\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Ce sont des points de rebroussement. En effet, calculons la limite à droite et à gauche de la direction de la tangente. D'abord, on a

$$\|f'(t)\| = 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(3t)} = 2\sqrt{2}\left|\sin\left(\tfrac{3t}{2}\right)\right|.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\frac{2\pi}{3}^+} \frac{1}{\|f'(t)\|} f'(t) &= \lim_{t\to\frac{2\pi}{3}^+} \begin{pmatrix} \frac{-2\sin t - 2\sin(2t)}{-2\sqrt{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)} \\ \frac{2\cos t - 2\cos(2t)}{-2\sqrt{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)} \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{R.H.}}{=} \lim_{t\to\frac{2\pi}{3}^+} \begin{pmatrix} \frac{\cos t + 2\cos(2t)}{\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)} \\ \frac{\sin t - 2\sin(2t)}{\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} f\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Si on calcule la limite à gauche, on trouve $\frac{\sqrt{2}}{3} f\left(\frac{2\pi}{2}\right)$. Les limites pointes dans les sens opposées, c'est pourquoi on trouve un point rebroussement. La démarche est la même pour les deux autres points.

Exercice 8. *Équation polaire.* Les coordonnées polaires sont

$$(*) \quad \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Une équation polaire polaire est une relation entre r et θ qui détermine la courbe. Lorsque l'on donne une équation polaire, il est implicitement dit que l'on remplace r ou θ dans $(*)$ pour obtenir la courbe. Par exemple, $r = 1$ est l'équation polaire du cercle de rayon 1.

Tracer les courbes suivantes. Dire si les courbes sont fermées. Calculer leurs vecteurs tangents et dire si elles sont régulières.

a) $r = 2$ b) $\theta = \frac{\pi}{4}$ c) $r = \theta$, pour $\theta \in [0, 2\pi]$

d) $r = \cos\theta$, pour $\theta \in [0, 2\pi]$ e) $r = 1 + \cos\theta$

Solution. b) On a la courbe

$$f(r) = \begin{pmatrix} r\cos\frac{\pi}{4} \\ r\sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}.$$

Le vecteur tangent est simplement

$$f'(r) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la courbe est régulière. En fait, c'est une droite qui fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe des x positif.

Elle n'est pas fermée, puisque $r \in [0, \infty)$.

d) La courbe est

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \cos t \sin t \end{pmatrix}.$$

Le vecteur tangent est

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -2\cos t \sin t \\ \cos^2 t - \sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on a

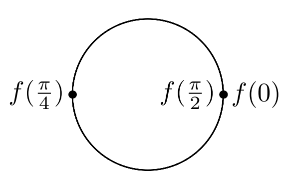
$$\begin{aligned} \|f'(t)\|^2 &= 4\sin^2 t\cos^2 t + \cos^4 - 2\cos^2 t\sin^2 t + \sin^4 t \\ &= \cos^4 + 2\cos^2 t\sin^2 t + \sin^4 t \\ &= (\cos^2 t + \sin^2 t)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\|f'(t)\| \neq 0$, il suit que $f'(t) \neq \vec{0}$, donc la courbe est régulière.

Enfin, on a

$$f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(2\pi),$$

donc la courbe est fermée.



Exercice 9. *Centre de masse*. Pour les courbes suivantes, vérifier* que $\|f'(t)\| = 1$ pour tout t. Ensuite, calculer le centre de masse des courbes en supposant qu'elles ont une densité de masse uniforme de 1 en utilisant la formule

$$\text{Centre de masse} = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Tracer la courbe et dessiner le centre de masse.

a) L'arc de cercle $f(t) = \begin{pmatrix} 3\cos\left(\frac{t}{3}\right) \\ 3\sin\left(\frac{t}{3}\right) \end{pmatrix}$, où $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Le segment de droite $f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix}$, où $t \in [-1, 2]$.

c) La courbe

$$f(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} t^2 \\ t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t \end{pmatrix},$$

où $t \in [0, 1]$. (Utilisez un logiciel pour tracer la courbe au besoin.)

Exercice 10. *Théorème fondamental du calcul (version vectoriel)*. Démontrer les deux parties de l'énoncé du théorème fondamentale du calcul, à savoir :

Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe continue.

a) On pose $F(t) = \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$. Alors F est dérivable sur $[a, b]$ et $F'(t) = f(t)$.

b) Si F est une primitive de f (c'est-à-dire que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$), alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$.

Exercice 11. Soit $f\colon [-1, 2] \to \mathbb{R}^2$ la courbe

$$f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}.$$

a) Tracer f.

b) Calculer $F(t) = \int_{-1}^t f(x)\mathrm{d}x$. Tracer F dans le même plan cartésien.

c) Tracer le segment de droite entre $F(a)$ et $F(b)$.

d) Indiquer ce que représente $\| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\|$ sur le dessin.

---

* Il y a une formule générale pour le centre de masse qui ne nécessite pas cette hypothèse. Elle sera peut-être discuter plus tard.