Calcul 2
Série 5

Exercice 1. Dire si les opérations suivantes sont permises (c'est-à-dire si elles sont bien définies). Soit $\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{a}, \vec{b}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $t\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

a) $\vec{a} \bullet (\nabla \bullet \vec{b})$
b) $t \cdot (\nabla \times \vec{v})$
c) $\nabla \times \vec{v} \times \vec{w}$
d) $(\vec{v} \times \vec{w}) \bullet \vec{x}$
e) $(\vec{w} \bullet \vec{x}) \times \vec{v}$
f) $\nabla \times \vec{a} \bullet \vec{b}$
g) $\vec{a} \bullet \vec{x}$
h) $\vec{a} \times \operatorname{div} \vec{b}$
i) $\nabla \bullet (\nabla \times \vec{v})$

Exercice 2. Calculer les opérations suivantes.

a) $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{pmatrix}$
b) $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$
c) $\nabla \bullet \begin{pmatrix} xe^y \\ -e^y \\ \sin\left(e^{xy^2}\right) \end{pmatrix}$
d) $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} xze^y \\ x^2 \\ yz^2 \end{pmatrix}$
e) $\nabla \times \begin{pmatrix} x^2 \\ x\cos^2 z \\ y\sin^2 z \end{pmatrix}$

Exercice 3. Trouver un paramétrage des trajectoires suivantes et faire un dessin (sauf pour le e).

a) Le cercle de rayon 4 centré en $(0,0)$.
b) Le cercle de rayon 1 centré en $(1,-1)$.
c) La droite passant par les points $(1,0,0)^T$ et $(0,1,0)^T$.
d) La droite passant par $(2,1,0)^T$ et dont le vecteur directeur est $\vec{d} = (1,1,1)^T$.
e) L'image du cercle de rayon 1 centré en $(0,0)$ par la fonction $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - xy^3 - 2xy^2 \\ -y^3 + 2x^2y + x^2y \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Déterminer sur le domaine maximal dans $\mathbb{R}$ sur lequel fonction suivante peut être définie.

a) $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$
$f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-t}} \\ \log(t+1) \end{pmatrix}$
$f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+t^2} \\ \tan t \end{pmatrix}$

Exercice 5. Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{t\to 0^+} \begin{pmatrix} \sin t \\ t+1 \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}$
b) $\lim\limits_{t\to 1^+} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t}-1} \\ \frac{\log t}{1-t} \end{pmatrix}$
c) $\lim\limits_{t\to \infty} \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{t} \\ \frac{t^2+1}{2t^2-1} \end{pmatrix}$

Exercice 6. Calculer les vecteurs tangents des courbes suivantes. Pour chaque courbe, dire si elle est régulière et tracer sa trajectoire.

a) $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$

b) $f(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(-t) \\ 3\sin(-t) \end{pmatrix}$

c) $f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$

d) $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$, $t \in [-1, 1]$

Exercice 7. *Deltoïde.* Soit la courbe paramétrée par

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos(2t) \\ 2\sin t - \sin(2t) \end{pmatrix},$$

pour $t \in [0, 2\pi]$.

a) Tracer un cercle de rayon 3. Évaluer $\vec{f}$ en $t = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ et en $t = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ et tracer ces points. Tenter de tracer le reste de la courbe.

b) Montrer que c'est une courbe fermée.

c) La courbe présente-t-elle des points de rebroussement? Des coins? Combien y en a-t-il de chacun, s'il y en a, et où se trouvent-ils dans le plan cartésien? La courbe est-elle régulière?

Exercice 8. *Équation polaire.* Les coordonnées polaires sont

$$(*) \quad \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Une équation polaire polaire est une relation entre r et θ qui détermine la courbe. Lorsque l'on donne une équation polaire, il est implicitement dit que l'on remplace r ou θ dans $(*)$ pour obtenir la courbe. Par exemple, $r = 1$ est l'équation polaire du cercle de rayon 1.

Tracer les courbes suivantes. Dire si les courbes sont fermées. Calculer leurs vecteurs tangents et dire si elles sont régulières.

a) $r = 2$

b) $\theta = \frac{\pi}{4}$

c) $r = \theta$, pour $\theta \in [0, 2\pi]$

d) $r = \cos\theta$, pour $\theta \in [0, 2\pi]$

e) $r = 1 + \cos\theta$

Exercice 9. *Centre de masse.* Pour les courbes suivantes, vérifier* que $\|f'(t)\| = 1$ pour tout t. Ensuite, calculer le centre de masse des courbes en supposant qu'elles ont une densité de masse uniforme de 1 en utilisant la formule

$$\text{Centre de masse} = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Tracer la courbe et dessiner le centre de masse.

a) L'arc de cercle $f(t) = \begin{pmatrix} 3\cos\left(\frac{t}{3}\right) \\ 3\sin\left(\frac{t}{3}\right) \end{pmatrix}$, où $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Le segment de droite $f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix}$, où $t \in [-1, 2]$.

c) La courbe

$$f(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} t^2 \\ t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t \end{pmatrix},$$

où $t \in [0, 1]$. (Utilisez un logiciel pour tracer la courbe au besoin.)

Exercice 10. *Théorème fondamental du calcul (version vectoriel).* Démontrer les deux parties de l'énoncé du théorème fondamentale du calcul, à savoir :

Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe continue.

a) On pose $F(t) = \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$. Alors F est dérivable sur $[a, b]$ et $F'(t) = f(t)$.

b) Si F est une primitive de f (c'est-à-dire que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$), alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$.

Exercice 11. Soit $f\colon [-1, 2] \to \mathbb{R}^2$ la courbe

$$f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}.$$

a) Tracer f.

b) Calculer $F(t) = \int_{-1}^t f(x)\mathrm{d}x$. Tracer F dans le même plan cartésien.

c) Tracer le segment de droite entre $F(a)$ et $F(b)$.

d) Indiquer ce que représente $\| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\|$ sur le dessin.

* Il y a une formule générale pour le centre de masse qui ne nécessite pas cette hypothèse. Elle sera peut-être discuter plus tard.