Calcul 2
Série 4

Exercice 1. Calculer le Wronskien des paires de fonctions suivantes. Pour chaque calcul, expliquer si cela implique que la paire de fonctions est linéairement indépendante.

a) e^x et xe^x b) $\cos x$ et $\sin x$ c) e^x et e^{2x}

Solution. Dans chaque cas, le calcul du Wronskien montre que la paire est linéairement indépendante, car une paire forme la solution homogène d'une EDO linéaire d'ordre 2 et le Wronskien est non nul (voir la proposition 1.5.3 des notes de cours au besoin).

a) Cette paire de fonctions forme la solution de l'EDO $y'' - 2y' + y = 0$. On a

$$W(e^x, xe^x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x} = e^{2x} \neq 0.$$

Exercice 2. Résoudre les EDO suivantes.

a) $y'' - 2y' + y = 4e^x \log x$ b) $y'' + y = \sec x \tan x$

Solution. a) On a le polynôme $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, qui possède une unique racine double $\lambda = 1$. Ainsi, on pose $y_1 = e^x$ et $y_2 = xe^x$. La solution homogène est

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Ensuite, on utilise la méthode de Lagrange. La solution particulière est de la forme $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$, où u_1 et u_2 sont des fonctions données par la méthode.

Le Wronskien de y_1 et y_2 a été calculé au 1a) et on a $W(y_1, y_2) = e^{2x}$. On a donc

$$\begin{aligned} u_1' = -\frac{y_2 r}{W(y_1, y_2)} \quad &\Leftrightarrow \quad u_1' = -\frac{xe^x\left(4e^x \log x\right)}{e^{2x}} \\ &\Leftrightarrow \quad u_1' = -4x \log x \\ &\Leftrightarrow \quad u_1 = -4 \int x \log x \mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \quad u_1 = -2x^2 \log x + x^2. \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} u_2' = \frac{y_1 r}{W(y_1, y_2)} \quad & u_2' = \frac{e^x\left(4e^x \log x\right)}{e^{2x}} \\ & u_2' = 4 \log x \\ & u_2 = 4 \int \log x \mathrm{d}x \\ & u_2 = 4x \log x - 4x. \end{aligned}$$

La solution particulière est donc

$$y_p = (-2x^2 \log x + x^2)e^x + (4x \log x - 4x)xe^x = 2x^2 e^x \log x - 3x^2 e^x.$$

La solution générale est

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + 2x^2 e^x \log x - 3x^2 e^x.$$

Exercice 3. Calculer le champ de vecteurs unitaire des champs de vecteurs suivants. Donner le domaine de définition du champ de vecteurs unitaires.

a) $f(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ y \end{pmatrix}$ b) $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \sin x \cos y \\ \sin x \sin y \end{pmatrix}$

Solution. b) On a

$$\|v\|^2 = \sin^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y = \sin^2 x(\cos^2 y + \sin^2 y) = \sin^2 x.$$

En prenant la racine carrée, on obtient $\|v\| = |\sin x|$. On voit que $\|v\| = 0$ si et seulement si $\sin x = 0$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, on a

$$w(x) = \frac{v}{|\sin x|},$$

le champ de vecteurs unitaires.

Exercice 4. Trouver un champ de vecteurs tangent aux courbes solutions des EDO suivantes.

a) $y' = y^2 + y$ b) $\begin{cases} x' = y \\ y' = xy \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = yz \\ y' = xz \\ z' = xy \end{cases}$

Solution. a) $v(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y^2 + y \end{pmatrix}$. b) Le champ $v(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ xy \end{pmatrix}$ est tangent aux solutions, car la dérivée est

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{xy}{y} = x$$

et la pente du champ de vecteurs est

$$\frac{xy}{y} = x.$$

c) Le champ de vecteurs $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ est tangent aux courbes solutions.

Si $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{pmatrix}^T$ est une courbe solution du système, alors on verra que le vecteur tangent à la courbe est

$$f'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Déterminer si les champs de vecteurs suivants sont tangents aux familles de fonctions données.

a) Le champ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix}$ et la famille $y(x) = x^2 + C$.

b) Le champ $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos y \\ -x \sin y \end{pmatrix}$ et la famille $x \cos\big(y(x)\big) = C$.

c) Le champ $\vec{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{2a^2x}{1+x^2+y^2} \\ -\dfrac{2b^2y}{1+x^2+y^2} \end{pmatrix}$ et la famille $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$.

Solution. c) La courbe décrite par $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ est une courbe de niveau de la fonction $f(x, y) = a^2x^2 + b^2y^2$. Ainsi, le gradient de f est perpendiculaire à la courbe. Pour que $\vec{v}$ soit tangent, il faut qu'il soit orthogonal au gradient. On calcule ainsi

$$\vec{v} \bullet \nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{2a^2x}{1+x^2+y^2} \\ -\dfrac{2b^2y}{1+x^2+y^2} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2a^2x & 2b^2y \end{pmatrix} = \frac{4a^4x^2 - 4b^4y^2}{1+x^2+y^2}.$$

Puisque cela est non nul, sauf en $(0, 0)$, on conclut que le champ de vecteur n'est pas tangent à la courbe. (Ni même en $(0, 0)$, puisque que le $\vec{v}$ est nul en ce point.)

Exercice 6. Dire si les opérations suivantes sont permises (c'est-à-dire si elles sont bien définies). Soit $\vec{v}, \vec{w}, \vec{x} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{a}, \vec{b} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $t \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

a) $\vec{a} \bullet \vec{b}$ b) $\vec{a} \bullet \vec{v}$ c) $\operatorname{div}(\vec{a} \bullet \vec{b})$

d) $\operatorname{div}(t) \bullet \vec{a}$ e) $t \operatorname{div}(\vec{a})$ f) $\operatorname{div}(\vec{v} \times \vec{w})$

Solution. Réponse sans justification. (Mais vous, vous devez justifier.)

a) Oui b) Non c) Non d) Non e) Oui f) Oui

Exercice 7. Calculer les opérations suivantes.

a) $\operatorname{div}\begin{pmatrix}\sin x\cos y\\ \cos x\sin y\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}x\\ xy\\ z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y\\ 2z\\ x\end{pmatrix}$ c) $\operatorname{div}\left[\begin{pmatrix}y^2\\ \cos x\\ 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\ 0\\ z^2\end{pmatrix}\right]$

Solution. a) On a

$$\operatorname{div}\begin{pmatrix}\sin x\cos y\\ \cos x\sin y\end{pmatrix}=\frac{\partial}{\partial x}\sin x\cos y+\frac{\partial}{\partial y}\cos x\sin y=\cos x\cos y+\cos x\cos y=2\cos x\cos y.$$

b) On a

$$\begin{pmatrix}x\\ xy\\ z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y\\ 2z\\ x\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ x & xy & z\\ y & 2z & x\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}x^2y-2z^2\\ yz-x^2\\ 2xz-xy^2\end{pmatrix}.$$

c) On a, d'une part,

$$\begin{pmatrix}y^2\\ \cos x\\ 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\ 0\\ z^2\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ y^2 & \cos x & 1\\ 1 & 0 & z^2\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}z^2\cos x\\ 1-y^2z^2\\ -\cos x\end{pmatrix}.$$

Ensuite, on a

$$\operatorname{div}\begin{pmatrix}z^2\cos x\\ 1-y^2z^2\\ -\cos x\end{pmatrix}=-z^2\sin x-2yz^2+0.$$

Exercices de révision du calcul différentiel à plusieurs variables

Cette section est optionnelle.

Exercice 8. Soit les fonctions

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}xy\\ x^2-y\\ 1\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad g(x,y,z)=x+y^2+z^3.$$

Calculer $\mathrm{d}(g\circ f)$.

Solution. D'abord, on a

$$\mathrm{d}g=\begin{pmatrix}1 & 2y & 3z\end{pmatrix}.$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(g\circ f)(x,y)&=\mathrm{d}g(xy,x^2-y,1)\mathrm{d}f(x,y)\\ &=\begin{pmatrix}1 & 2(x^2-y) & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & x\\ 2x & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}y+4x(x^2-y) & x-2(x^2-y)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercice 9. Soit les fonctions

$$f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t\cos t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\mathrm{d}(g \circ f)$. Est-il possible de calculer $\mathrm{d}(f \circ g)$?

Solution. On a

$$\mathrm{d}g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(g \circ f) &= \mathrm{d}g(t^2, t\cos t)\mathrm{d}f(t) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t\cos t & t^2 \\ 0 & 2t\cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ \cos t - t\sin t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ 2t^2\cos t + t^2\cos t - t^3 \sin t \\ 2t\cos^2 t - 2t^2 \sin t \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il n'est pas possible de calculer $\mathrm{d}(f \circ g)$, car la composition ne fonctionne pas. (Le codomaine de g n'est pas dans le domaine de f.)

Exercice 10. Soit les fonctions

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ x^2 + y^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(x,y) = \log(xy).$$

Calculer la dérivée direction de $g \circ f$ dans la direction $u = (1,1)^T$.

Solution. On se rappelle que la dérivée directionnelle est

$$D_u(g \circ f) = \mathrm{d}(g \circ f) \bullet \frac{u}{\|u\|}.$$

On a d'une part

$$\mathrm{d}g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(g \circ f)(x,y) &= \mathrm{d}g(x^2 y, x^2 + y^3)\mathrm{d}f(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2 y} & \frac{1}{x^2+y^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 2x & 3y^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+y^3} & \frac{1}{y} + \frac{3y^2}{x^2+y^3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Enfin, on a

$$D_u(g \circ f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+y^3} & \frac{1}{y} + \frac{3y^2}{x^2+y^3} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+y^3} + \frac{1}{y} + \frac{3y^2}{x^2+y^3} \right).$$

Exercice 11. Soit les fonctions

$$f(s,t) = \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{pmatrix}$$

et $g\colon (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) \in \mathbb{R}$, définies de sorte que la composée $g \circ f$ est bien définie. Calculer la dérivée partielle de $g \circ f$ par rapport à s.

Solution. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}(g \circ f)(s,t) &= \frac{\partial}{\partial s} g\big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Comme il n'y a pas d'expression donnée pour g, x, y et z, on laisse la dérivée comme ça.

Remarque : À la ligne $(*)$, il faut comprendre que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}\big(x(s,t), y(s,y), z(s,t)\big)$$

et de même pour $\frac{\partial g}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial z}$. On l'écrit de cette façon simplement pour alléger la notation.