Calcul 2

Série 4

Exercice 1. Calculer le Wronskien des paires de fonctions suivantes. Pour chaque calcul, expliquer si cela implique que la paire de fonctions est linéairement indépendante.

a) e^x et xe^x b) $\cos x$ et $\sin x$ c) e^x et e^{2x}

Exercice 2. Résoudre les EDO suivantes.

a) $y'' - 2y' + y = 4e^x \log x$ b) $y'' + y = \sec x \tan x$

Exercice 3. Calculer le champ de vecteurs unitaire des champs de vecteurs suivants. Donner le domaine de définition du champ de vecteurs unitaires.

a) $f(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ y \end{pmatrix}$ b) $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \sin x \cos y \\ \sin x \sin y \end{pmatrix}$

Exercice 4. Trouver un champ de vecteurs tangent aux courbes solutions des EDO suivantes.

a) $y' = y^2 + y$ b) $\begin{cases} x' = y \\ y' = xy \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = yz \\ y' = xz \\ z' = xy \end{cases}$

Exercice 5. Déterminer si les champs de vecteurs suivants sont tangents aux familles de fonctions données.

a) Le champ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix}$ et la famille $y(x) = x^2 + C$.

b) Le champ $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos y \\ -x \sin y \end{pmatrix}$ et la famille $x \cos\big(y(x)\big) = C$.

c) Le champ $\vec{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{2a^2 x}{1 + x^2 + y^2} \\ -\dfrac{2b^2 y}{1 + x^2 + y^2} \end{pmatrix}$ et la famille $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$.

Exercice 6. Dire si les opérations suivantes sont permises (c'est-à-dire si elles sont bien définies). Soit $\vec{v}, \vec{w}, \vec{x} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{a}, \vec{b} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $t \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

a) $\vec{a} \bullet \vec{b}$ b) $\vec{a} \bullet \vec{v}$ c) $\operatorname{div}(\vec{a} \bullet \vec{b})$

d) $\operatorname{div}(t) \bullet \vec{a}$ e) $t \operatorname{div}(\vec{a})$ f) $\operatorname{div}(\vec{v} \times \vec{w})$

Exercice 7. Calculer les opérations suivantes.

a) $\operatorname{div}\begin{pmatrix}\sin x\cos y\\ \cos x\sin y\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}x\\ xy\\ z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y\\ 2z\\ x\end{pmatrix}$ c) $\operatorname{div}\left[\begin{pmatrix}y^2\\ \cos x\\ 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\ 0\\ z^2\end{pmatrix}\right]$

Exercices de révision du calcul différentiel à plusieurs variables

Cette section est optionnelle.

Exercice 8. Soit les fonctions

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}xy\\ x^2-y\\ 1\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad g(x,y,z)=x+y^2+z^3.$$

Calculer $\mathrm{d}(g\circ f)$.

Exercice 9. Soit les fonctions

$$f(t)=\begin{pmatrix}t^2\\ t\cos t\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad g(x,y)=\begin{pmatrix}y\\ xy\\ y^2\end{pmatrix}.$$

Calculer $\mathrm{d}(g\circ f)$. Est-il possible de calculer $\mathrm{d}(f\circ g)$?

Exercice 10. Soit les fonctions

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}x^2y\\ x^2+y^3\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad g(x,y)=\log(xy).$$

Calculer la dérivée direction de $g\circ f$ dans la direction $u=(1,1)^T$.

Exercice 11. Soit les fonctions

$$f(s,t)=\begin{pmatrix}x(s,t)\\ y(s,t)\\ z(s,t)\end{pmatrix}$$

et $g\colon(x,y,z)\mapsto g(x,y,z)\in\mathbb{R}$, définies de sorte que la composée $g\circ f$ est bien définie. Calculer la dérivée partielle de $g\circ f$ par rapport à s.