Équations différentielles ordinaires

Série 3

Exercice 1. Réduire les EDO d'ordre deux suivantes à l'ordre un afin de les résoudre.

a) $xy'' + y' = 1$

b) $y'' = \dfrac{1}{3x + y'} - 3$

c) $y'' = y'y$

d) $y'' + y^2 = 0$

Solution. b) On pose $z = y'$. On obtient

$$z' = \frac{1}{3x+z} - 3 = \frac{1-9x-3z}{3x+z}$$

et donc $9x + 3z - 1 + (3x+z)z' = 0$. On peut vérifier que c'est une équation exacte :

$$\frac{\partial}{\partial x}(3x+z) = 3 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial z}(9x+3z-1) = 3.$$

Toutes ces fonctions sont de classe C^1, donc il existe φ de (x, y) telle que $\varphi(x, y) = C$ est la solution générale implicite.

On a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 9x + 3z - 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \tfrac{9}{2}x^2 + 3xz - x + h(z).$$

Si on dérive cette équation par rapport à z, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 3x + h'(z).$$

On porte cette équation dans $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 3x + z$. On déduit que $h'(z) = z$ et donc $h(z) = \frac{z^2}{2}$ fait l'affaire.

La solution implicite est donc $\varphi(x, z) = \frac{9}{2}x^2 + 3xz - x + \frac{z^2}{2} = C$. On multiplie l'équation par 2 et on applique la formule quadratique par rapport à z :

$$9x^2 + 6xz - 2x + z^2 = 2C \quad \Rightarrow \quad z = \frac{-6x \pm \sqrt{36x^2 - 4(9x^2 - 2x - 2C)}}{2}.$$

Cette dernière équation se simplifie quelque peu :

$$y' = z = -3x \pm \sqrt{2x + 2C}.$$

On intègre en x pour obtenir la réponse finale

$$y = -\tfrac{3}{2}x^2 \pm (2x + 2C)^{3/2} + D.$$

c) On pose $z\big(y(x)\big) = y'(x)$. Si on dérive, on obtient $z'\big(y(x)\big)y'(x) = y''(x)$. Si on porte ce changement dans l'EDO, il en resulte l'équation suivante

$$\begin{aligned} z'z = zy \quad &\Leftrightarrow \quad z' = y && \text{(si } z \neq 0\text{)} \\ &\Leftrightarrow \quad z = \tfrac{y^2}{2} + C \\ 2y' &= y^2 + 2C \\ 2\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + 2C} &= \int \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Il y a trois cas pour résoudre cette EDO, selon la valeur de C.

Si $C = 0$, alors on a $-\frac{2}{y} = x + D$.

Si $C > 0$, alors pour simplifier on pose $K^2 = 2C$ et on obtient

$$\begin{aligned} 2\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + K^2} &= \frac{2}{K^2}\int \frac{\mathrm{d}y}{\frac{y^2}{K^2} + 1} && \big(u = \tfrac{y}{K}\big) \\ &= \frac{2}{K}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 1} \\ &= \frac{2}{K}\arctan\big(\tfrac{y}{K}\big) \\ &= x + D. \end{aligned}$$

On trouve donc $y = K\tan\big(\frac{Kx}{2} + \frac{KD}{2}\big)$.

Si $C < 0$, alors pour simplifier, on pose $K^2 = -2C$. On a alors

$$\begin{aligned} 2\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - K^2} &= 2\int \frac{\mathrm{d}y}{(y-K)(y+K)} \\ &= \frac{1}{K}\int \left(\frac{1}{y-K} - \frac{1}{y+K}\right) \\ &= \frac{1}{K}\log|y-K| - \frac{1}{K}\log|y+K| \\ &= x + D. \end{aligned}$$

On le laisse sous forme implicite.

Exercice 2. Réduire les EDO d'ordre deux suivantes à un système de deux d'EDO d'ordre un, sans les résoudre.

a) $u'' + \lambda^2 u = 0$

b) $v'' + \cos(v)v' = 2t + 1$

Exercice 3. Résoudre les EDO linéaires homogènes d'ordre deux suivantes. Vérifier que les deux solutions trouvées sont linéairement indépendantes.

a) $y'' - 4y = 0$ b) $y'' - 2y' + 2y = 0$ c) $y'' + 4y' + 4y = 0$

Solution. a) Le polynôme associé est $p(\lambda) = \lambda^2 - 4$, dont les racines sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -2$. La solution homogène est donc

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

c) Le polynôme est $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4$. Ce polynôme se factorise en $(\lambda + 2)^2$. Ainsi, il y a une racine double $\lambda = -2$. La solution homogène est donc

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

Exercice 4. Pour chaque problème, déterminer si la fonction proposée est une solution particulière de l'EDO. Si ce n'est pas une solution particulière, expliquer comment modifier la fonction pour qu'elle le soit.

a) $y'' + 4y' + 3y = 2e^{-x}$ et $y_p = e^{-x}$;

b) $4y'' + y = 8\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ et $y_p = 2x\sin\left(\frac{x}{2}\right)$;

c) $y'' + 2y' + y = 4xe^{-x}$ et $y_p = 2e^{-x}$.

Solution. a) Non. Si on remplace, on a

$$e^{-x} - 4e^{-x} + 3e^{-x} = 0 \neq 2e^{-x}.$$

En fait, cela montre que $y = e^{-x}$ est une solution de l'équation homogène.

On pose $y_p = Cxe^{-x}$. On dérive et on remplace :

$$(-Ce^{-x} - Ce^{-x} + Cxe^{-x}) + 4(Ce^{-x} - Cxe^{-x}) + 3Cxe^{-x} = 2e^{-x} \quad \Rightarrow \quad 2Ce^{-x} = 2e^{-x}$$

et donc $C = 1$.

Exercice 5. Trouver une solution particulière aux EDO linéaires inhomogènes suivantes en utilisant la méthode des coefficients indéterminés. (Notez que ce sont les mêmes solutions homogènes qu'à l'exercice 3.)

a) $y'' - 4y = x^2$ b) $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}$ c) $y'' + 4y' + 4y = 6\cos(2x)$

Solution. a) On pose $z = Ax^2 + Bx + C$. Si z est une solution particulière, alors elle devra vérifiée l'EDO. On a

$$z' = 2Ax + B \qquad \text{et} \qquad z'' = 2A.$$

Ensuite, on trouve

$$\begin{aligned} 2A - 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2 \quad &\Rightarrow \quad -4Ax^2 - 4Bx + (2A - 4C) = x^2 \\ &\Rightarrow \quad -4A = 1, \qquad B = 0, \qquad 2A - 4C = 0. \end{aligned}$$

Après avoir résolu le système, on trouve $A = \frac{1}{4}$ et $C = \frac{1}{8}$, donc la solution particulière est $y_p = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}$.

Exercice 6. Trouver une solution particulière aux EDO linéaires inhomogènes suivantes en utilisant la méthode de variation des paramètres (méthode de Lagrange). (Notez que ce sont les mêmes solutions homogènes qu'à l'exercice 3.)

a) $y'' - 4y = 9xe^x$ b) $y'' - 2y' + 2y = e^x$

Solution. b) Le polynôme est $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, dont les racines sont $\lambda_\pm = 1 \pm i$. Ainsi, on pose

$$y_1 = e^x \cos x \qquad \text{et} \qquad y_2 = e^x \sin x.$$

La solution homogène est alors $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

La solution particulière est donnée par $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$, où u_1 et u_2 sont déterminées par la méthode de Lagrange. Commençons par calculer le wronskien de y_1 et y_2 :

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x \cos x - e^x \sin x & e^x \sin x + e^x \cos x \end{vmatrix} \\ &= e^{2x} \cos x \sin x + e^{2x} \cos^2 x - e^{2x} \cos x \sin x + e^{2x} \sin^2 x \\ &= e^{2x}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{y_2 r(x)}{W(y_1, y_2)} \\ &= -\frac{(e^x \sin x) e^x}{e^{2x}} \\ &= -\sin x. \end{aligned}$$

Il suit que $u_1 = \cos x$.

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{y_1 r(x)}{W(y_1, y_2)} \\ &= \frac{(e^x \cos x) e^x}{e^{2x}} \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

Il suit que $u_2 = \sin x$.

La solution particulière est donc

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\ &= \cos x (e^x \cos x) + \sin x (e^x \sin x) \\ &= e^x. \end{aligned}$$

On conclut que la solution générale est

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + e^x.$$

Exercice 7. Résoudre les EDO linéaires du deuxième ordre suivantes.

a) $y'' + 2y' - 3y = 4e^x$ b) $y'' + 4y' + 5y = \sin x$ c) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

Solution. a) Le polynôme est $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda + 3)(\lambda - 1)$, dont les racines sont $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 1$. On pose

$$y_1 = e^{-3x} \qquad \text{et} \qquad y_2 = e^x.$$

La solution homogène est $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Pour appliquer la méthode des coefficients indéterminés, on devrait prendre $z(x) = Ce^x$, mais cette fonction est linéairement dépendante de y_2. Pour enlever la dépendance, on multiplie par x, donc on prend plutôt $z = Cxe^x$.

On dérive z deux fois :

$$z' = Ce^x + Cxe^x, \qquad z'' = 2Ce^x + Cxe^x.$$

Si on suppose que z est une solution de l'EDO, alors elle vérifie $z'' + 2z' - 3z = 4e^x$, c'est-à-dire

$$\big(2Ce^x + Cxe^x\big) + 2\big(Ce^x + Cxe^x\big) - 3Cxe^x = 4e^x \quad \Rightarrow \quad 4Ce^x = 4e^x,$$

donc $C = 1$. La solution générale est donc

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + xe^x.$$

b) Le polynôme est $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$, dont les racines sont

$$\lambda_\pm = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = -2 \pm i.$$

Ainsi, la solution homogène est $y_h = C_1 e^{-2x} \sin x + C_2 e^{-2x} \cos$. Si on applique la méthode de variation du paramètre, on cherche une solution particulière de la forme $y_h = A \sin x + B \cos x$. Celle-ci est linéairement indépendante de la solution homogène, donc c'est un candidat acceptable.

On pose $z = A \sin x + B \cos x$. On dérive et on remplace

$$z' = A \cos x - B \sin x$$
$$z'' = -A \sin x - B \cos x$$

et

$$(-A \sin x - B \cos x) + 4(A \cos x - B \sin x) + 5(A \sin x + B \cos x) = \sin x$$
$$(-A - 4B + 5A) \sin x + (-B + 4A + 5B) \cos x = \sin x$$
$$4A - 4B = 1 \quad \text{et} \quad 4A + 4B = 0$$
$$A = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad B = -\frac{1}{8}.$$

La solution particulière est donc

$$y_p = \frac{1}{8}\sin x - \frac{1}{8}\cos x.$$

La solution générale est

$$y = C_1 e^{-2x}\sin x + C_2 e^{-2x}\cos x + \frac{1}{8}\sin x - \frac{1}{8}\cos x.$$

Exercice 8. Résoudre les EDO suivantes. Assurez-vous de trouver les solutions singulières s'il y a lieu.

a) $y''(x) - \big(y'(x)\big)^2 = 1$

b) $2y'' - 2y' - 4 = x$

c) $u'' + u^2 u' = 0$

d) $y'' + 4y' + 8y = 65\cos x$

e) $(1+x)y'' - y' = 1$

Solution. a) Ni y, ni x n'apparaissent explicitement dans l'EDO, donc on peut choisir entre les deux changements de variables. On choisit celui-ci : on pose $z(x) = y'(x)$. On a donc $z'(x) = y''(x)$ et donc

$$\begin{aligned}
z' - z^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z' = 1 + z^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z'}{1+z^2} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \int \mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \quad \arctan(z) = x + C \\
&\Leftrightarrow \quad z = \tan(x+C) \\
&\Leftrightarrow \quad y' = \tan(x+C) \\
&\Leftrightarrow \quad y = \int \tan(x+C)\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \quad y = -\log|\cos(x+C)| + D.
\end{aligned}$$

c) Comme x est absent, on pose $z\big(u(x)\big) = u'(x)$. On dérive et on obtient $z'(u)u' = u''$. On porte cette équation dans l'EDO

$$\begin{aligned}
z'z + u^2 z = 0 \quad &\Rightarrow \quad z' = -u^2 \\
&\Rightarrow \quad z = -\frac{u^3}{3} + C \\
&\Rightarrow \quad u' = -\frac{u^3 + 3C}{3} \\
&\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}u}{u^3 + 3C} = -\frac{x}{3} + D.
\end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est fastidieuse. Si $C = 0$, alors on trouve $\frac{-2}{u^2}$. Si $C \neq 0$, on pose $K^3 = 3C$ pour simplifier. On a alors

$$u^3 + K^3 = (u+K)(u^2 - Ku + K^2).$$

Le discriminant du polynôme quadratique est $\Delta = K^2 - 4K^2 = -3K^2 < 0$, donc il n'a pas de racines réelles. On applique donc la méthode des fractions partielles comme suit

$$\frac{1}{(u+K)(u^2-Ku+K^2)} = \frac{A}{u+K} + \frac{Bu+C}{u^2-Ku+K^2}.$$

On trouve

$$\frac{1}{(u+K)(u^2-Ku+K^2)} = \frac{1}{3K^2}\left(\frac{1}{u+K} + \frac{-u+2K}{u^2-Ku+K^2}\right).$$

Il reste à intégrer. On a

$$\frac{1}{3K^2}\int\left(\frac{1}{u+K} + \frac{-u+2K}{u^2-Ku+K^2}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{3K^2}\log|u+K| + \frac{1}{3K^3}\int\frac{-u+2K}{u^2-Ku+K^2}\mathrm{d}u.$$

Pour la dernière intégrale, on a

$$\begin{aligned}\int\frac{-u+2K}{u^2-Ku+K^2}\mathrm{d}u &= -\frac{1}{2}\int\frac{2u-4K}{u^2-Ku+K^2}\mathrm{d}u\\ &= -\frac{1}{2}\int\frac{2u-K}{u^2-Ku+K^2}\mathrm{d}u + \frac{3K}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2-Ku+K^2}\\ &= -\frac{1}{2}\log|u^2-Ku+K^2| + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2u-K}{\sqrt{3}K}\right)\end{aligned}$$

La solution générale implicite est

$$\frac{1}{3K^2}\log|u+K| - \frac{1}{2}\log|u^2-Ku+K^2| + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2u-K}{\sqrt{3}K}\right) = -\frac{x}{3} + D,$$

si $K \neq 0$ et

$$\frac{-2}{u^2} = -\frac{x}{3} + D$$

si $K = 0$.

e) C'est une EDO linéaire, mais les coefficients ne sont pas constants. Ainsi, on tente plutôt de la réduire. Puisque y n'apparaît pas explicitement dans l'équation, on fait le changement de variable $z(x) = y'(x)$. On a donc

$$z' = y''z' = \frac{1+z}{1+x}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{1+z} = \int\frac{\mathrm{d}x}{1+x} \qquad \text{(si } z \neq -1\text{)}$$

$$\log|1+z| = \log|1+x| + C$$

$$1+z = D|1+x|$$

$$y' = D|1+x| - 1$$

$$y = \begin{cases} D\left(x+\frac{x^2}{2}\right) - x + E, & \text{si } x \geq -1,\\ -D\left(x+\frac{x^2}{2}\right) - x + E, & \text{si } x < -1.\end{cases}$$

En général, on préfère qu'une solution soit définie sur un intervalle, donc on trouve la solution

$$y_1(x) = D\big(x + \tfrac{x^2}{2}\big) - x + E$$

définie sur $(-1, \infty)$ et la solution

$$y_2(x) = -D\big(x + \tfrac{x^2}{2}\big) - x + E$$

définie sur $(-\infty, -1)$.

Exercice 9. Soit l'EDO $y'' + y = 0$.

a) Trouver la famille de solutions générales.

b) Trouver la solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Notons cette solution par $f(x)$.

c) Montrer que $g(x) := -f(-x)$ est aussi une solution à ce problème de Cauchy.

d) Déduire que cette fonction* est impaire, c'est-à-dire que $f(-x) = -f(x)$.

Solution. a) Le polynôme est $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, donc les racines sont $\lambda = \pm i$. Ainsi, la solution générale est $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

b) Si $y(0) = 0$, alors $C_2 = 0$. Si $y'(0) = 1$, alors $C_2 \cos 0 = 1$, donc $C_2 = 1$. Ainsi, la solution recherchée est $y = \sin x$.

c) On a $g'(x) = f'(-x)$ et $g''(x) = -f''(-x) = -f(-x) = g(x)$, donc g est une solution de l'EDO. De plus, $g(0) = -f(0) = 0$ et $g'(0) = f'(0) = 1$, donc g est une solution au problème de Cauchy.

d) Par le théorème d'existence et d'unicité, on a $g(x) = f(x)$ pour tout x, c'est-à-dire $-f(-x) = f(x)$. Autrement dit, on a $-\sin(-x) = \sin x$.

Exercice 10. Suivre la démarche de l'exercice précédent pour montrer que cos est une fonction paire (c.-à-d. $\cos(-x) = \cos(x)$).

Exercice 11. Soit g une solution de $y'' + y = 0$. On pose $h(x) = \big(g(x)\big)^2 + \big(g'(x)\big)^2$.

a) Montrer que $h'(x) = 0$ pour tout x.

* Ceci est une façon possible de démontrer que sin est impair.

b) Déduire l'identité trogonométrique $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Solution. a) On a

$$h'(x) = 2g(x)g'(x) + 2g'(x)g''(x) = 2g(x)g'(x) - 2g'(x)g(x) = 0.$$

b) Par le a), h est une fonction constante. Avec $g(x) = \sin x$, qui est une solution de l'EDO de départ, on trouve $h(0) = 0 + 1$, donc $h(x) = 1$ pour tout x. D'autre part, on a

$$h(x) = \sin^2 x + \cos^2 x.$$

L'identité en découle.

Exercice 12†. Inspirez-vous du numéro précédent pour montrer que les solutions de $y'' + y = 0$ sont nécessairement de la forme $f(x) = A\cos x + B\sin x$.