Équations différentielles ordinaires

Série 3

Exercice 1. Réduire les EDO d'ordre deux suivantes à l'ordre un afin de les résoudre.

a) $xy'' + y' = 1$ b) $y'' = \dfrac{1}{3x + y'} - 3$

c) $y'' = y'y$ d) $y'' + y^2 = 0$

Exercice 2. Réduire les EDO d'ordre deux suivantes à un système de deux d'EDO d'ordre un, sans les résoudre.

a) $u'' + \lambda^2 u = 0$ b) $v'' + \cos(v)v' = 2t + 1$

Exercice 3. Résoudre les EDO linéaires homogènes d'ordre deux suivantes. Vérifier que les deux solutions trouvées sont linéairement indépendantes.

a) $y'' - 4y = 0$ b) $y'' - 2y' + 2y = 0$ c) $y'' + 4y' + 4y = 0$

Exercice 4. Pour chaque problème, déterminer si la fonction proposée est une solution particulière de l'EDO. Si ce n'est pas une solution particulière, expliquer comment modifier la fonction pour qu'elle le soit.

a) $y'' + 4y' + 3y = 2e^{-x}$ et $y_p = e^{-x}$;

b) $4y'' + y = 8\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ et $y_p = 2x\sin\left(\frac{x}{2}\right)$;

c) $y'' + 2y' + y = 4xe^{-x}$ et $y_p = 2e^{-x}$.

Exercice 5. Trouver une solution particulière aux EDO linéaires inhomogènes suivantes en utilisant la méthode des coefficients indéterminés. (Notez que ce sont les mêmes solutions homogènes qu'à l'exercice 3.)

a) $y'' - 4y = x^2$ b) $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}$ c) $y'' + 4y' + 4y = 6\cos(2x)$

Exercice 6. Trouver une solution particulière aux EDO linéaires inhomogènes suivantes en utilisant la méthode de variation des paramètres (méthode de Lagrange). (Notez que ce sont les mêmes solutions homogènes qu'à l'exercice 3.)

a) $y'' - 4y = 9xe^x$ b) $y'' - 2y' + 2y = e^x$

Exercice 7. Résoudre les EDO linéaires du deuxième ordre suivantes.

a) $y'' + 2y' - 3y = 4e^x$ b) $y'' + 4y' + 5y = \sin x$ c) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

Exercice 8. Résoudre les EDO suivantes. Assurez-vous de trouver les solutions singulières s'il y a lieu.

a) $y''(x) - \big(y'(x)\big)^2 = 1$

b) $2y'' - 2y' - 4 = x$

c) $u'' + u^2u' = 0$

d) $y'' + 4y' + 8y = 65\cos x$

e) $(1+x)y'' - y' = 1$

Exercice 9. Soit l'EDO $y'' + y = 0$.

a) Trouver la famille de solutions générales.

b) Trouver la solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Notons cette solution par $f(x)$.

c) Montrer que $g(x) := -f(-x)$ est aussi une solution à ce problème de Cauchy.

d) Déduire que cette fonction* est impaire, c'est-à-dire que $f(-x) = -f(x)$.

Exercice 10. Suivre la démarche de l'exercice précédent pour montrer que cos est une fonction paire (c.-à-d. $\cos(-x) = \cos(x)$).

Exercice 11. Soit g une solution de $y'' + y = 0$. On pose $h(x) = \big(g(x)\big)^2 + \big(g'(x)\big)^2$.

a) Montrer que $h'(x) = 0$ pour tout x.

b) Déduire l'identité trogonométrique $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Exercice 12†. Inspirez-vous du numéro précédent pour montrer que les solutions de $y''+y = 0$ sont nécessairement de la forme $f(x) = A\cos x + B\sin x$.

---

* Ceci est une façon possible de démontrer que sin est impair.