Équations différentielles ordinaires

Travail pratique 1 (suite)

Exercice 1. Trouver la solution aux problèmes de Cauchy suivants.

a) $\begin{cases} y'(t) = \log(t), \\ y(1) = 1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} u'(v) = \lambda v^2 u(v), \\ u(0) = 1, \end{cases}$ où λ est une constante positive.

Exercice 2. Trouver la solution satisfaisant la condition initiale donnée.

a) La solution de $y' = \cos y$ passant par le point $(1, 0)$.

a) La solution de $y + (x + xy)y' = 0$ passant par le point $(1, 1)$.

Exercice 3. Dire si les EDO suivantes sont linéaires. Si oui, dire si elles sont homogènes ou inhomogènes.

a) $xy' + (\cos x)y + 2x = 0$ b) $yy' + 2xy = 0$

c) $\left(y'\right)^2 + y^2 = x^2$ d) $y' + \sin(xy) = 0$

e) $e^x y' = \dfrac{y \cos x - y \sin x}{x^2 + 1}$

Solution. a) linéaire inhomogène b) linéaire inhomogène c) non linéaire d) non linéaire e) linéaire homogène

Exercice 4. Trouver la solution homogène des EDO linéaires suivantes.

a) $(x^2 + 1)y' = y$ b) $e^x y' - y = 0$ c) $(\cos x)y' - y = 0$

Solution. b) On peut réécrire l'EDO en $y' = e^{-x}y$. La solution homogène est de la forme $y_h = e^{\int e^{-x} \mathrm{d}x}$, donc $y_h = e^{-e^{-x}}$. On peut aussi simplement utiliser la séparation de variables.

c) On a $y' = \sec xy$, donc $y_h = e^{\int \sec x \mathrm{d}x} = e^{\log|\sec x + \tan x|} = |\sec x + \tan x|$.

Exercice 5. La solution homogène de $y' - \frac{1}{x}y = 0$ est $y_h(x) = Cx$. Trouver une solution particulière aux EDO inhomogènes suivantes.

a) $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ b) $y' - \dfrac{1}{x}y = xe^x$

c) $y' - \frac{1}{x}y = \log\log x$ d) $y' - \frac{1}{x}y = x\cos x$

Solution. c) On pose $z(x) = u(x)x$, où u est à déterminer de sorte que z soit une solution de l'équation inhomogène. On a

$$z'(x) = u'(x)x + u(x). \tag{$*$}$$

Si on suppose que z vérifie l'équation inhomogène, alors on a

$$z' - \frac{1}{x}z = \log\log x.$$

On remplace $z = xu$ et $(*)$ dans cette équation pour obtenir

$$xu' + u - \frac{1}{x}(xu) = \log\log x \quad \Rightarrow \quad xu' + u - u = \log\log x$$

donc $xu' = \log\log x$. On divise par x et on intègre

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{\log\log x}{x}\mathrm{d}x \\ &= \int \log v \mathrm{d}v \\ &= v\log v - v + D \\ &= \log x \log\log x - \log x + D. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v &= \log x \\ \mathrm{d}v &= \frac{1}{x}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On peut prendre $D = 0$ pour simplfier. (N'importe quelle valeur de D donnera une solution particulière adéquate.) On a donc $z = (\log x \log\log x - \log x)x$ comme solution particulière.

d) En suivant la même démarche que la solution précédente, on arrive à l'EDO

$$xu' = x\cos x,$$

donc $u = \sin x$ fait l'affaire. Une solution particulière sera alors donnée par $z = x\sin x$.

Exercice 6. Résoudre les EDO suivantes. Assurez-vous de trouver les solutions singulières s'il y en a.

a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + x$ b) $(x\cos y)y' = \sin y$ c) $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$

d) $2 + 3y' - 3\frac{y}{x} - 2x^2 = -x$ e) $\log y + 2xy + \left(\frac{x}{y} + x^2\right)y' = 0$

f) $y' = 1 - x\cos(x-y)$ g) $\log y + \left(\frac{x}{y} + 1\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ h) $a' = \frac{a^2+b^2}{ab}$

i) $y' = y^2 + x^2 + 2xy$ j) $(\cos x)y' - (\sin x)y = \tan x$

k) $t^2 \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = t^2 - st + s^2$ ℓ) $x^2 y' = x^2 + y^2$ m)† $y' = \dfrac{2y^2 + xy - x^2}{xy + x^2}$

Solution. b) C'est une EDO à variables séparables. On suppose que $\sin y \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
(x\cos y)y' = \sin y \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{cotan} y y' = \frac{1}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \int \operatorname{cotan} y \, \mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \log|\sin y| = \log|x| + D \\
&\Leftrightarrow \quad \sin y = C|x| \\
&\Leftrightarrow \quad y = \arcsin(C|x|).
\end{aligned}$$

On a donc $y = -\arcsin(Cx)$ définie sur $(-1, 0)$ ou $y = \arcsin(Cx)$ définie sur $(0, 1)$ comme solution générale. Si $\sin y \equiv 0$, alors $y \equiv n\pi$, pour $n \in \mathbb{Z}$. On voit que ces fonctions constantes sont des solutions, donc pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, $y(x) = n\pi$ est une solution singulière.

d) On réarrange les termes :

$$2 + 3y' - 3\frac{y}{x} - 2x^2 = -x \quad \Leftrightarrow \quad 3y' - 3\frac{y}{x} = 2x^2 - x - 2.$$

C'est une EDO linéaire inhomogène. Trouvons la solution homogène. On a $3xy' - 3y = 0$, donc $y_h = Ce^{\int \frac{-1}{x}\mathrm{d}x} = Ce^{-\log|x|} = C|x|$. On suppose que $x > 0$. La démarche est similaire si $x < 0$. La solution homogène est donc $y_h = x$.

Pour la solution particulière, on pose $z = xu$, où u est une fonction à déterminer de sorte que z soit une solution particulière. On a

$$z' = u + xu' \quad \text{et} \quad 3z' - 3\frac{z}{x} = 2x^2 - x - 2.$$

En remplaçant dans la deuxième équation, on trouve

$$\begin{aligned}
3u + 3xu' - 3u = 2x^2 - x - 23xu' &= 2x^2 - x - 2 \\
3u' &= 2x - 1 - \frac{2}{x} \\
3u &= \int \left(2x - 1 - \frac{2}{x}\right) \\
3u &= x^2 - x - 2\log|x| + D.
\end{aligned}$$

On prend $D = 0$ pour simplifier. (N'importe quelle valeur aurait fait l'affaire.) On a donc $y_p = z = x(x^2 - x - \log x^2)$. La solution générale est

$$y = Cy_h + y_p = Cx + x^3 - x^2 - x\log x^2.$$

f) On tente de simplifier l'équation avec le changement de variable $u = x - y$. On a $u' = 1 - y'$ et donc

$$y' = 1 - x\cos(x-y) \quad \Rightarrow \quad 1 - u' = 1 - \cos u \quad \Rightarrow \quad u' = \cos u.$$

On utilise la séparation de variables pour obtenir $\log|\sec u + \tan u| = x + C$. Si on revient à la variable y, on trouve la solution implicite

$$\log|\sec(x-y) + \tan(x-y)| = x + C.$$

g) On vérifie si l'EDO est exacte. On a

$$\frac{\partial}{\partial y}\log y = \frac{1}{y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}+1\right) = \frac{1}{y}.$$

La condition d'intégrabilité est donc vérifié, mais les fonctions ne sont pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, donc on ne peut pas encore affimer que l'équation est exacte. Essayons tout de même de trouver la fonction φ. On a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \log y \quad \Rightarrow \quad \varphi = x\log y + h(y).$$

Si on dérive par rapport à y, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x}{y} + h'(y).$$

On veut également

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x}{y} + 1.$$

En combinant, on trouve

$$\frac{x}{y} + h'(y) = \frac{x}{y} + 1 \quad \Rightarrow \quad h'(y) = 1 \quad \Rightarrow \quad h(y) = y + C.$$

La fonction $\varphi(x,y) = x\log y + y$ fait l'affaire, donc l'équation est exacte et la solution implicite est $\varphi(x,y) = D$.

k) On divise l'équation par t^2 et on utilise le changement de variable $u = \dfrac{s}{t}$:

$$\begin{aligned}
t^2 s' = t^2 - st + s^2 \quad &\Leftrightarrow \quad s' = 1 - \frac{s}{t} + \frac{s^2}{t^2} \\
&\Leftrightarrow \quad u + tu' = 1 - u + u^2 \\
&\Leftrightarrow \quad tu' = 1 - 2u + u^2 \\
&\Leftrightarrow \quad tu' = (u-1)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{u'}{(u-1)^2} = \frac{1}{t} \qquad\qquad (\text{si } u \neq 1) \\
&\Leftrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}u}{(u-1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{u-1} = \log|t| + C \\
&\Leftrightarrow \quad u - 1 = -\frac{1}{\log|t| + C} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{s}{t} = 1 - \frac{1}{\log|t| + C} \\
&\Leftrightarrow \quad s = t - \frac{t}{\log|t| + C}.
\end{aligned}$$

Comme on a supposé que $u \neq 1$, on vérifie si $u \equiv 1$ est une solution. On remplace $u' = 0$ et $u = 1$ dans $tu' = (u-1)^2$; on voit que c'est une solution. Ainsi $s(t) = t$ est une solution singulière.

m) On multiplie le numérateur et le dénumérateur par $\frac{1}{x^2}$:

$$y' = \frac{2y^2 + xy - x^2}{xy + x^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}.$$

Maintenant on applique le changement de variable $u = \frac{y}{x}$:

$$\begin{aligned}
u + xu' = \frac{2u^2 + u - 1}{u+1} \quad &\Leftrightarrow \quad xu' = \frac{2u^2 + u - 1}{u+1} - u \\
&\Leftrightarrow \quad xu' = \frac{2u^2 + u - 1}{u+1} - \frac{u^2 + u}{u+1} \\
&\Leftrightarrow \quad xu' = \frac{u^2 - 1}{u+1} \\
&\Leftrightarrow \quad xu' = u - 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{u'}{u-1} = \frac{1}{x} && \text{(si } u \neq -1\text{)} \\
&\Leftrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}u}{u-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \log|u-1| = \log|x| + D \\
&\Leftrightarrow \quad u - 1 = C|x|.
\end{aligned}$$

On a donc la solution $\frac{y}{x} = C|x| + 1$ et donc $y = Cx|x| + x$.

Comme on a supposé que $u \neq 1$, on vérifie si $u \equiv 1$ est une solution. On remplace $u' = 0$ et $u = 1$ dans $xu' = u - 1$. On voit que cela fonctionne, donc c'est une solution singulière. Ainsi, $y = x$ est une solution singulière.

Exercice 7. *Interprétation géométrique de la forme normale.* Soit l'EDO $y' = f(x,y) = xy$.

a) Trouver la famille de solutions générales.

b) Trouver la solution singulière.

c) Tracer le graphe des solutions y_1, y_2, y_3, y_4 satisfaisant aux conditions initiales

$$y_1(0) = 1, \qquad y_2(0) = 3,$$
$$y_3(0) = -1, \qquad y_4(0) = -3,$$

ainsi que le graphe de la solution singulière.

d) Tracer quelques vecteurs du champ de vecteurs

$$V(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ xy \end{pmatrix}$$

sur les courbes tracées en c). Quel est le lien entre les vecteurs tracés et les solutions?

Exercice 8. *Problème de mélange.* On considère un réservoir de $200L$ contenant $40L$ d'une solution salée dans lequel est dissout 50g de sel. Il y a $3L$/min de solution qui s'écoule du réservoir et $5L$/min de solution à 3g/L de sel qui coule à l'intérieur du réservoir. En supposant que la solution se mélange uniformément instantanément, calculer la quantité de sel dans le réservoir lorsqu'il sera plein.

Solution. Soit $Q(t)$ la quantité de sel au temps t, en minute. Soit $V(t) = 40 + 2t$ le volume de solution au temps t. On a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= \text{taux de variation du sel}\\ &= \text{sel qui entre} - \text{sel qui sort}\\ &= 3 \times 5 - \underbrace{3}_{\text{liquide qui sort}} \times \underbrace{\frac{Q(t)}{V(t)}}_{\text{quantité de sel/L}}\\ &= 15 - \frac{3Q}{40 + 2t}.\end{aligned}$$

C'est une EDO linéaire inhomogène.

La solution homogène est

$$y_h = \exp\left(-\int \frac{3}{40+2t}\mathrm{d}t\right) = \exp\left(-\tfrac{3}{2}\log(40+2t)\right) = \frac{1}{(40+2t)^{\frac{3}{2}}}.$$

On applique la méthode de variation du paramètre. On pose $z = \dfrac{u}{(40+2t)^{\frac{3}{2}}}$. Si on dérive, on obtient

$$z' = \frac{u'}{(40+2t)^{\frac{3}{2}}} - 3\frac{u}{(40+2t)^{\frac{5}{2}}}.$$

Ensuite, on remplace dans l'EDO :

$$\begin{aligned} z' + 3\frac{z}{40+2t} = 15 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{u'}{(40+2t)^{\frac{3}{2}}} - 3\frac{u}{(40+2t)^{\frac{5}{2}}} + 3\frac{u}{(40+2t)^{\frac{3}{2}}(40+2t)} = 15\\ &\quad \frac{u'}{(40+2t)^{\frac{3}{2}}} = 15\\ &\quad u' = 15(40+2t)^{\frac{3}{2}}\\ &\quad u = 15\int (40+2t)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t\\ &\quad u = 3(40+2t)^{\frac{5}{2}}.\end{aligned}$$

Une solution particulière est donc de la forme $y_p = \dfrac{3(40+2t)^{\frac{5}{2}}}{(40+2t)^{\frac{3}{2}}} = 3(40+2t)$.

On conclut que $Q(t) = \frac{C}{(40+2t)^{\frac{3}{2}}} + 3(40+2t)$. Puisque $Q(0) = 50$, on trouve

$$\frac{C}{40^{\frac{3}{2}}} = 50 - 120 = -70 \quad \Rightarrow \quad C = -70 \times 40^{\frac{3}{2}}.$$

Le réservoir sera plein lorsque $V(t) = 200$, c'est-à-dire lorsque $t = 80$. La quantité de sel est donc $Q(80)$,

$$Q(80) = \frac{-70 \times 40^{\frac{3}{2}}}{2000^{3/2}} + 600 \approx 594\text{g}.$$

Exercice 9. *La fonction d'erreur.* Soit le problème de Cauchy d'ordre deux

$$(*) \quad \begin{cases} y'' = -2xy' \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \end{cases}$$

On appelle $\operatorname{erf}(x)$ la solution à ce problème de Cauchy, c'est la fonction d'erreur. Elle fait partie des fonctions que l'on appelle parfois *fonctions spéciales*.

a) Faire la substitution $u(x) = y'(x)$ pour obtenir une EDO d'ordre 1 et résoudre cette EDO d'ordre 1.

b) Résoudre l'EDO $y' = u$: la solution devra s'écrire comme une intégrale définie

$$C \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Trouver la fonction $f(t)$ et les constantes x_0 et C de sorte à satisfaire au problème de Cauchy $(*)$. Conclure que la fonction $\operatorname{erf}(x)$ s'écrit sous la forme intégrale trouvée.

c) Montrer que $y(x) = \operatorname{erf}(x)e^{x^2}$ est une solution de $y'' - 2xy' - 2y = 0$.