Équations différentielles ordinaires

Travail pratique 1 (suite)

Exercice 1. Trouver la solution aux problèmes de Cauchy suivants.

a) $\begin{cases} y'(t) = \log(t), \\ y(1) = 1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} u'(v) = \lambda v^2 u(v), \\ u(0) = 1, \end{cases}$ où λ est une constante positive.

Exercice 2. Trouver la solution satisfaisant la condition initiale donnée.

a) La solution de $y' = \cos y$ passant par le point $(1, 0)$.

a) La solution de $y + (x + xy)y' = 0$ passant par le point $(1, 1)$.

Exercice 3. Dire si les EDO suivantes sont linéaires. Si oui, dire si elles sont homogènes ou inhomogènes.

a) $xy' + (\cos x)y + 2x = 0$ b) $yy' + 2xy = 0$

c) $\left(y'\right)^2 + y^2 = x^2$ d) $y' + \sin(xy) = 0$

e) $e^x y' = \dfrac{y\cos x - y\sin x}{x^2 + 1}$

Exercice 4. Trouver la solution homogène des EDO linéaires suivantes.

a) $(x^2 + 1)y' = y$ b) $e^x y' - y = 0$ c) $(\cos x)y' - y = 0$

Exercice 5. La solution homogène de $y' - \frac{1}{x}y = 0$ est $y_h(x) = Cx$. Trouver une solution particulière aux EDO inhomogènes suivantes.

a) $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ b) $y' - \dfrac{1}{x}y = xe^x$

c) $y' - \dfrac{1}{x}y = \log\log x$ d) $y' - \dfrac{1}{x}y = x\cos x$

Exercice 6. Résoudre les EDO suivantes. Assurez-vous de trouver les solutions singulières s'il y en a.

a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + x$ b) $(x \cos y)y' = \sin y$ c) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$

d) $2 + 3y' - 3\dfrac{y}{x} - 2x^2 = -x$ e) $\log y + 2xy + \left(\dfrac{x}{y} + x^2\right) y' = 0$

f) $y' = 1 - x\cos(x - y)$ g) $\log y + \left(\dfrac{x}{y} + 1\right) \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ h) $a' = \dfrac{a^2 + b^2}{ab}$

i) $y' = y^2 + x^2 + 2xy$ j) $(\cos x)y' - (\sin x)y = \tan x$

k) $t^2 \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = t^2 - st + s^2$ ℓ) $x^2 y' = x^2 + y^2$ m)† $y' = \dfrac{2y^2 + xy - x^2}{xy + x^2}$

Exercice 7. *Interprétation géométrique de la forme normale*. Soit l'EDO $y' = f(x, y) = xy$.

a) Trouver la famille de solutions générales.
b) Trouver la solution singulière.
c) Tracer le graphe des solutions y_1, y_2, y_3, y_4 satisfaisant aux conditions initiales

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1, & y_2(0) &= 3, \\ y_3(0) &= -1, & y_4(0) &= -3, \end{aligned}$$

ainsi que le graphe de la solution singulière.

d) Tracer quelques vecteurs du champ de vecteurs

$$V(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ xy \end{pmatrix}$$

sur les courbes tracées en c). Quel est le lien entre les vecteurs tracés et les solutions?

Exercice 8. *Problème de mélange*. On considère un réservoir de $200L$ contenant $40L$ d'une solution salée dans lequel est dissout 50g de sel. Il y a $3L$/min de solution qui s'écoule du réservoir et $5L$/min de solution à 3g/L de sel qui coule à l'intérieur du réservoir. En supposant que la solution se mélange uniformément instantanément, calculer la quantité de sel dans le réservoir lorsqu'il sera plein.

Exercice 9. *La fonction d'erreur.* Soit le problème de Cauchy d'ordre deux

$$(*) \quad \begin{cases} y'' = -2xy' \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \end{cases}$$

On appelle $\mathrm{erf}(x)$ la solution à ce problème de Cauchy, c'est la fonction d'erreur. Elle fait partie des fonctions que l'on appelle parfois *fonctions spéciales*.

a) Faire la substitution $u(x) = y'(x)$ pour obtenir une EDO d'ordre 1 et résoudre cette EDO d'ordre 1.

b) Résoudre l'EDO $y' = u$: la solution devra s'écrire comme une intégrale définie

$$C \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Trouver la fonction $f(t)$ et les constantes x_0 et C de sorte à satisfaire au problème de Cauchy $(*)$. Conclure que la fonction $\mathrm{erf}(x)$ s'écrit sous la forme intégrale trouvée.

c) Montrer que $y(x) = \mathrm{erf}(x)e^{x^2}$ est une solution de $y'' - 2xy' - 2y = 0$.