Calcul 2
Travail pratique 1

Exercice 1. Vérifier que les équations suivantes sont une solution des EDO.

a) $y = \sqrt{x}$ est une solution de $y' = \frac{1}{2y}$, où $x, y > 0$.

b) $y = e^{x^2}$ est une solution de $y' = 2xy$.

c) $\varphi(x, y) = x^2 + 2y^3 = C$ est une solution de $2x + 6y^2y' = 0$.

d) $\varphi(x, y) = (x - \sin y)^2 = C$ est une solution de $y' = \sec y$.

e) $\log y + xy = C$ est solution de $\left(\frac{1}{y} + x\right) y' + y = 0$.

Solution. d) On dérive l'équation $(x - \sin y)^2 = C$ par rapport à x :

$$2(x - \sin y)(1 - y' \cos y) = 0.$$

Si on remplace $y' = \sec y$, on trouve

$$2(x - \sin y)(1 - \sec y \cos y) = 2(x - \sin y)(1 - 1) = 0.$$

Ainsi, $\varphi(x, y) = C$ est une solution implicite de $y' = \sec y$.

Exercice 2. Séparation de variables. Résoudre les EDO suivantes par la méthode de séparation de variables. Trouver également les solutions singulières.

a) $y' = \dfrac{x}{y+1}$ b) $x^2 + xyy' = 1$ c) $y' = xy + y + x + 1$

Solution. a) On a

$$\begin{aligned} y' = \frac{x}{y+1} \quad &\Leftrightarrow \quad (y+1)y' = x \\ &\Leftrightarrow \quad \int (y+1)\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{y^2}{2} + y = \tfrac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

On laisse la solution générale sous forme implicite (mais il serait possible d'isoler y).

Il n'y a pas de solution singulière.

b) On a

$$\begin{aligned} x^2 + xyy' = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad xyy' = 1 - x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad yy' = \frac{1 - x^2}{x} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \int y\,\mathrm{d}y = \int \frac{1-x^2}{x}\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{y^2}{2} = \int \left(\frac{1}{x} - x\right)\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow \quad & \tfrac{y^2}{2} = \log|x| - \tfrac{x^2}{2} + C.
\end{aligned}
$$

On laisse la solution générale sous forme implicite (mais il serait possible d'isoler y).

Il n'y a pas de solution singulière.

c) On a

$$
\begin{aligned}
y' = xy + y + x + 1 \quad & \Leftrightarrow \quad y' = y(x+1) + (x+1) \\
& \Leftrightarrow \quad y' = (x+1)(y+1) && \text{(si } y \neq -1\text{)} \\
& \Leftarrow \quad \frac{y'}{y+1} = x+1 \\
& \Leftrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \int (x+1)\mathrm{d}x \\
& \Leftrightarrow \quad \log|y+1| = \tfrac{x^2}{2} + x + C.
\end{aligned}
$$

On laisse la solution générale sous forme implicite (mais il serait possible d'isoler y).

On voit qu'à la ligne $(*)$, on doit supposer que $y \neq -1$. En fait, la fonction constante $y \equiv -1$ est une solution.

Exercice 3. Résoudre les EDO suivantes en utilisant le changement de variable $u = \dfrac{y}{x}$.

a) $y' = y + \dfrac{y}{x}$ b) $x^2y' = xy + y^2$ c) $y' = \dfrac{y}{x-2y}$

Solution. c) On a

$$
\begin{aligned}
y' = \frac{y}{x-2y} \quad & \Leftrightarrow \quad y' = \frac{y}{x\big(1 - 2\frac{y}{x}\big)} \\
& \Leftrightarrow \quad y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 - 2\frac{y}{x}} \\
& \Leftrightarrow \quad u + xu' = \frac{u}{1-2u} \\
& \Leftrightarrow \quad xu' = \frac{u}{1-2u} - u \\
& \Leftrightarrow \quad xu' = \frac{u - u + 2u^2}{1-2u} \\
& \Leftrightarrow \quad xu' = \frac{2u^2}{1-2u} && \text{(si } u \neq 0\text{)} \\
& \Leftrightarrow \quad \int \frac{1-2u}{2u^2}\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \int \left(\frac{1}{2u^2} - \frac{1}{u}\right) \mathrm{d}u = \log|x| + C \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2u} - \log|u| = \log|x| + C \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{x}{2y} - \log\left|\frac{y}{x}\right| = \log|x| + C.
\end{aligned}
$$

On laisse la solution sous forme générale.

Comme on suppose que $u \neq 0$, on vérifie si $u \equiv 0$ est une solution singulière. Si $u \equiv 0$, alors $y \equiv 0$ et il est clair que c'est une solution.

Exercice 4. Résoudre les EDO suivantes en utilisant le changement de variable $u = ax + by$.

a) $y' = x + y$

b) $y' = \sqrt{-y^2 - 4xy - 4x^2 + 1} - 2$

c) $3y' = \dfrac{x - 3y}{3y + x}$

Solution. b) On commence par compléter le carré. On a

$$-y^2 - 4xy - 4x^2 + 1 = -(y^2 + 4xy) - 4x^2 + 1 = -(y^2 + 4xy + 4x^2) + 4x^2 - 4x^2 + 1 = -(y + 2x)^2 + 1.$$

(Les plus observateur·trice·s auront peut-être remarqué directement que $y^2 + 4xy + 4x^2$ est un carré parfait.)

On fait le changement de variable $u = y + 2x$ et donc $u' = y' + 2$. Ainsi, l'EDO devient

$$
\begin{aligned}
u' - 2 = \sqrt{-u^2 + 1} - 2 \quad &\Leftarrow \quad \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}} = 1 \qquad \text{(si } u \neq \pm 1\text{)} \\
&\Leftrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \quad \arcsin(u) = x + C \\
&\Leftrightarrow \quad \arcsin(y + 2x) = x + C.
\end{aligned}
$$

On voit que $u \equiv \pm 1$ sont des solutions singulières, c'est-à-dire $y = \pm 1 - 2x$.

Exercice 5. Vérifier si les EDO suivantes sont exactes, au quel cas, résoudre par le méthode des équations exactes.

a) $\cos x \cos y - (\sin x \sin y) y' = 0$

b) $-x \sin x - y^2 \sin x + \cos x + (2y \cos x) y' = 0$

c) $xy + x^2 y' = 0$

Solution. b) On a

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-x \sin x - y^2 \sin x + \cos x\right) = -2y \sin x$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x}(2y \cos x) = -2y \sin x.$$

Comme ces deux quantités sont égales et que toutes les fonctions sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, on conclut que l'EDO est exacte.

Soit $\varphi\colon (x,y) \mapsto \varphi(x,y)$ la fonction dont les courbes de niveau sont les solutions de l'EDO. D'une part, on doit avoir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y\cos x \Rightarrow \varphi(x,y) = y^2\cos x + h(x).$$

Si on dérive cette équation par rapport à x, on obtient $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = -y^2\sin x + h'(x)$.

D'autre part, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -x\sin x - y^2\sin x + \cos x = -y^2\sin x + h'(x).$$

Ainsi, on trouve $h'(x) = -x\sin x + \cos x$ et donc $h(x) = x\cos x$.

La solution générale est $\varphi(x,y) = C$, c'est-à-dire

$$x\cos x + y^2\cos x = C.$$

c) On a

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy) = x \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x.$$

L'EDO n'est pas exacte.

Exercice 6. Trouver un facteur intégrant et résoudre l'EDO.

a) $2(y+1) + xy' = 0$ b) $y^2 + y + xy' = 0$ c) $y(1+x) + xy' = 0$

Solution. b) On suppose que μ dépend seulement de y. On a

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\mu(y^2+y)\big) = \mu'(y^2+y) + \mu(2y+1)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu x) = \mu.$$

On obtient donc l'EDO qui dépend seulement de y suivante :

$$\begin{aligned}
\mu'(y^2+y) + \mu(2y+1) = \mu \quad &\Rightarrow \quad \mu'(y^2+y) = \mu - 2y\mu - \mu \\
&\Rightarrow \quad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{-2y}{y^2+y} \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \int \frac{-2y}{y^2+y}\mathrm{d}y \\
&\Rightarrow \quad \log|\mu| = -2\int \frac{\mathrm{d}y}{y+1} \\
&\Rightarrow \quad \log|\mu| = -2\log|y+1| \\
&\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{(y+1)^2}.
\end{aligned}$$

On obtient l'équation exacte

$$\frac{y}{y+1} + \frac{xy'}{(y+1)^2} = 0.$$

Soit φ la solution. On a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y}{y+1} \Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{xy}{y+1} + h(y).$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial y} &= x\left(\frac{(y+1)-y}{(y+1)^2}\right) + h'(y) = \frac{x}{(y+1)^2} + h'(y) \\ &= \frac{x}{(y+1)^2}.\end{aligned}$$

Il suit que $h'(y) = 0$, donc on peut prendre $h(y) = 0$.

La solution générale est $\varphi(x,y) = C$, c'est-à-dire

$$\frac{xy}{y+1} = C.$$

Exercice 7†. Le but de l'exercice est de montrer que la fonction exponentielle possède un développement en série. On prend comme définition de e^x l'unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série formelle*.

a) Supposons que f est une solution de l'EDO. Supposez que vous puissiez dériver la série terme à terme afin de montrer que les coefficients satisfont à l'équation de récurence

$$na_n = a_{n-1}.$$

b) En supposant que f satisfasse au problème de Cauchy, trouvez une expression explicite pour a_n.

c) Montrez que le rayon de convergence de la série est $+\infty$.

   Remarque. Il est vu dans un cours d'analyse qu'il est alors légitime de dériver la série terme à term, donc l'hypothèse de a) était fondée *à posteriori*.

d) En utilisant le théorème d'existence et d'unicité des solutions, concluez que $f(x) = e^x$.

* Ici, formelle veut dire qu'on ne se soucit pas de sa convergence, du moins pour le moment.