Calcul 2

Travail pratique 1

Exercice 1. Vérifier que les équations suivantes sont une solution des EDO.

a) $y = \sqrt{x}$ est une solution de $y' = \frac{1}{2y}$, où $x, y > 0$.

b) $y = e^{x^2}$ est une solution de $y' = 2xy$.

c) $\varphi(x, y) = x^2 + 2y^3 = C$ est une solution de $2x + 6y^2 y' = 0$.

d) $\varphi(x, y) = (x - \sin y)^2 = C$ est une solution de $y' = \sec y$.

e) $\log y + xy = C$ est solution de $\left(\frac{1}{y} + x\right) y' + y = 0$.

Exercice 2. Séparation de variables. Résoudre les EDO suivantes par la méthode de séparation de variables. Trouver également les solutions singulières.

a) $y' = \dfrac{x}{y+1}$ b) $x^2 + xyy' = 1$ c) $y' = xy + y + x + 1$

Exercice 3. Résoudre les EDO suivantes en utilisant le changement de variable $u = \dfrac{y}{x}$.

a) $y' = y + \dfrac{y}{x}$ b) $x^2 y' = xy + y^2$ c) $y' = \dfrac{y}{x - 2y}$

Exercice 4. Résoudre les EDO suivantes en utilisant le changement de variable $u = ax + by$.

a) $y' = x + y$ b) $y' = \sqrt{-y^2 - 4xy - 4x^2 + 1} - 2$

c) $3y' = \dfrac{x - 3y}{3y + x}$

Exercice 5. Vérifier si les EDO suivantes sont exactes, au quel cas, résoudre par le méthode des équations exactes.

a) $\cos x \cos y - (\sin x \sin y) y' = 0$ b) $-x \sin x - y^2 \sin x + \cos x + (2y \cos x) y' = 0$

c) $xy + x^2 y' = 0$

Exercice 6. Trouver un facteur intégrant et résoudre l'EDO.

a) $2(y + 1) + xy' = 0$ b) $y^2 + y + xy' = 0$ c) $y(1 + x) + xy' = 0$

Exercice 7†. Le but de l'exercice est de montrer que la fonction exponentielle possède un développement en série. On prend comme définition de e^x l'unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série formelle*.

a) Supposons que f est une solution de l'EDO. Supposez que vous puissiez dériver la série terme à terme afin de montrer que les coefficients satisfont à l'équation de récurence

$$na_n = a_{n-1}.$$

b) En supposant que f satisfasse au problème de Cauchy, trouvez une expression explicite pour a_n.

c) Montrez que le rayon de convergence de la série est $+\infty$.

Remarque. Il est vu dans un cours d'analyse qu'il est alors légitime de dériver la série terme à term, donc l'hypothèse de a) était fondée *à posteriori*.

d) En utilisant le théorème d'existence et d'unicité des solutions, concluez que $f(x) = e^x$.

* Ici, formelle veut dire qu'on ne se soucit pas de sa convergence, du moins pour le moment.