Calcul 2

Intégrales sur les courbes et les surfaces

1. Intégrale d'un champ scalaire

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes, où C ou γ sont des courbes.

a) $\displaystyle\int_\gamma y\,\mathrm{d}s$, $\gamma:\ x(t)=t^2,\ y(t)=2t,\ 0\le t\le 3$

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y}{x}\,\mathrm{d}s$, $\gamma:\ x=t^3,\ y=t^4,\ 1\le t\le 2$

c) $\displaystyle\int_C x\,\mathrm{d}s$, $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$, $t\in[0,2\pi]$

d) $\displaystyle\int_\gamma (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$, $\gamma(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$, $0\le t\le 2\pi$

e) $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, $\gamma:$ spirale polaire $r=t$, $t\in[0,1]$

f) $\int_\gamma xe^y\,\mathrm{d}s$, $\gamma:$ segment de droite allant de $(2,0)$ à $(5,4)$

g) $\displaystyle\int_\gamma y^2z\,\mathrm{d}s$, $\gamma:$ segment de droite allant de $(3,1,2)$ à $(1,2,5)$

h) $\displaystyle\int_C xe^{yz}\,\mathrm{d}s$, $\gamma:$ segment de droite allant de $(0,0,0)$ à $(1,2,3)$

i) $\displaystyle\int_\gamma e^{x+z}\,\mathrm{d}s$, $\gamma:\ x=2t,\ y=\sqrt{3}t^2,\ z=t^3,\ 0\le t\le 1$

j) $\displaystyle\int_C xy\,\mathrm{d}s$, $C:\ x=\cosh(t),\ y=\sinh(t)$, $t\in[0,1]$

k) $\displaystyle\int_C \log(x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$, $C:$ arc de cercle de rayon $\sqrt{2}$ passant par $(1,-1)$ et $(1,1)$

l) $\displaystyle\int_\gamma \arctan(\tfrac{y}{x})\,\mathrm{d}s$, $\gamma(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$, $t\in[0,\frac{\pi}{2})$

Solution. a) On calcule $\mathrm{d}s$. On a

$$\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}=\sqrt{4t^2+4}=2\sqrt{t^2+1}.$$

On a

$$\begin{aligned}\int_\gamma y\,\mathrm{d}s&=\int_0^3 2t\cdot 2\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\ &=2\int_1^{10}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u \qquad (u=t^2+1)\\ &=2\frac{u^{\frac32}}{\frac32}\Bigg|_1^{10}\\ &=\frac43(10^{\frac32}-1).\end{aligned}$$

c) On a $r'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ et donc $\|r'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$. L'intégrale donne

$$\begin{aligned}\int_C x \, \mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} \cos t \, \mathrm{d}t \\ &= 0.\end{aligned}$$

d) C'est le même calcul pour $\|\gamma'(t)\|$ qu'à la partie précédente. On a donc

$$\int_\gamma (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \, \mathrm{d}t = 2\pi.$$

e) La spirale est paramétrée par $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix}$. Pour calculer $\mathrm{d}s$, on a $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\|^2 &= (\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 \\ &= \cos^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t \\ &= 1 + t^2.\end{aligned}$$

Ensuite, on a $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = |t|$. L'intégrale donne donc

$$\begin{aligned}\int_\gamma \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}s &= \int_0^1 |t|\sqrt{1 + t^2} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t\sqrt{1 + t^2} \, \mathrm{d}t && (\text{car } t \geq 0) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u} \, \mathrm{d}u && (u = 1 + t^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

g) On commence par paramétrer γ. On pose $\vec{d} = (1, 2, 5)^T - (3, 1, 2)^T = (-2, 1, 3)^T$. On l'utilise comme vecteur directeur. La droite est donc

$$\gamma(t) = t\vec{d} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

avec $t \in [0, 1]$. Ensuite, on a $\|\gamma'(t)\| = \|\vec{d}\| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$. Pour calculer l'intégrale, on a

$$\int_\gamma y^2 z \, \mathrm{d}s = \int_0^1 (t + 1)^2 (3t + 2)\sqrt{14} \, \mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{14}\int_0^1 (t^2+2t+1)(3t+2)\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{14}\int_0^1 \big(3t^3+6t^2+3t+2t^2+4t+2\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{14}\int_0^1 \big(3t^3+8t^2+7t+2\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{14}\left[\frac{3t^4}{4}+\frac{8t^3}{3}+\frac{7t^2}{2}+2t\right]_0^1 \\
&= \sqrt{14}\left[\frac{3}{4}+\frac{8}{3}+\frac{7}{2}+2\right]_0^1 \\
&= \sqrt{14}\frac{12+32+42}{12} \\
&= \sqrt{14}\frac{86}{12} = \sqrt{14}\frac{43}{6}.
\end{aligned}
$$

i) Pour $\mathrm{d}s$, on commence par

$$
\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3}t \\ 3t^2 \end{pmatrix}
$$

et donc $\|\gamma'(t)\|^2 = 4+12t^2+9t^4 = \big(2+3t^2\big)^2$. Il suit que $\|\gamma'(t)\| = |2+3t^2| = 2+3t^2$ (car $2+3t^2>0$). On calcule maintenant l'intégrale

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma e^{x+z}\,\mathrm{d}s &= \int_0^1 e^{2t+t^3}(2+3t^2)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^3 e^u\,\mathrm{d}u && (u=2t+t^3) \\
&= e^u\Big|_0^3 \\
&= e^3-1.
\end{aligned}
$$

l) On a déjà calculé $\|\gamma'(t)\|$ à la partie c) et on a trouvé 1. Pour l'intégrande, on a $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) = \arctan\big(\tan(t)\big) = t$. On a donc

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \arctan\left(\tfrac{y}{x}\right)\,\mathrm{d}s &= \lim_{M\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^M t\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{M\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{t^2}{2}\Big|_0^M
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{M \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{M^2}{2}$$

$$= \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 2. On considère la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ paramétrée par

$$\Sigma(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

On rappelle que

$$\|\vec{N}\| = |\cos\varphi|.$$

(Refaites le calcul au besoin.) Calculer $\int_S F \, \mathrm{d}S$, avec F un champ scalaire et S, une partie de la sphère, où

a) $F(x, y, z) = x + y$ et S est l'hémisphère nord

b) $F(x, y, z) = xz$ et S est l'hémisphère sud

c) $F(x, y, z) = x^2 + y^2$ et S est la partie de la sphère au-dessus du plan $z = \frac{1}{2}$

d) $F(x, y, z) = z^2$ et S est la partie entre le méridien[3] à 0° et le méridian à 45°

Solution. a) D'abord, on a $F \circ \Sigma(\theta, \varphi) = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\cos\varphi = (\cos\theta + \sin\theta)\cos\varphi$. L'hémisphère nord correspond à la latitude $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_S F \, \mathrm{d}S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (\cos\theta + \sin\theta)\cos\varphi\,|\cos\varphi| \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \, \mathrm{d}\varphi \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $\int_0^{2\pi} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta = 0$ et $\int_0^{2\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = 0$.

b) On a $F \circ \Sigma(\theta, \varphi) = \cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\cos^2\varphi = \cos^2\varphi$. Ensuite, la partie de la sphère au-dessus du plan $z = \frac{1}{2}$ est la partie dont la latitude vérifie $\sin\varphi \geq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ (on arrête l'intervalle à $\frac{\pi}{2}$, car la lattitude est entre $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$).

Pour l'intégrale, on trouve

$$\int_S F \, \mathrm{d}S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi |\cos\varphi| \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$$

[1] Le méridien à θ degré est l'arc de grand cercle allant du pôle nord au pôle sud et qui un fait un angle θ avec le demi-plan $y = 0$, $x \geq 0$.

$$= 2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \, \mathrm{d}\varphi \qquad \text{(car } \cos\varphi \geq 0 \text{ pour } \tfrac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2}\text{)}$$

On omet les calculs de la primitive de $\cos^3\varphi$. On peut utilisé une formule de réduction ou des identités trigonométriques. On trouve

$$\int_S F \, \mathrm{d}S = \frac{2\pi}{12}\big(9\sin x + \sin(3x)\big)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{6}\big(9 - 1 - \frac{9}{2} - 1\big)$$
$$= \frac{5\pi}{12}.$$

Exercice 3. Calculer la moyenne du champ scalaire f le long de la courbe C, où

a) $f(x,y) = xe^{y^2}$ et C est le segment de droite de $(0,0,0)$ à $(1,1,0)$

b) $f(x,y) = y$ et C est la partie de la courbe $x = y^2$, $x \in [0,1]$

c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et C est la courbe $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t\cos(8t) \\ t\sin(8t) \\ t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$

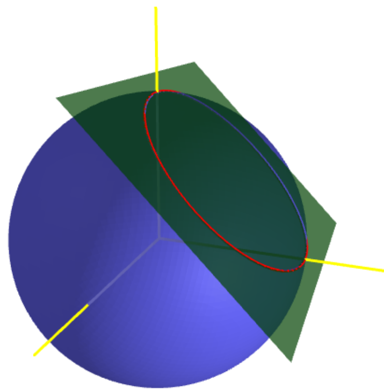
d) $f(x,y) = xy$ et C est la frontière du demi-disque $x^2+y^2 \leq 1$, $y \geq 0$

Exercice 4. Calculer le centre de masse de la courbe C ayant comme densité ρ, où

a) C est les deux segments de droite joignant $(-1,0)$ à $(0,1)$ et $(0,1)$ à $(1,0)$ et $\rho(x,y) = x^2 + y$

b)* C est la courbe d'intersection de la sphère $x^2+y^2+z^2 = 1$ et du plan $y + z = 1$ et $\rho(x,y,z) = yz - \frac{1}{2}x^2 + z$

*Pour le b), une façon possible est de partir du cercle $(r\cos t, r\sin t, 0)^T$ et d'effectuer une rotation et une translation qui déplace ce cercle au bon endroit. Il faudra également déterminer la constante r (qui ne dépend pas de t). Voir la figure.



Solution. b) Le centre du cercle se trouve au point milieu du segment de droite entre $(0,0,1)^T$ et $(0,1,0)^T$, c'est donc au point $P = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$. Le diamètre du cercle est la longueur de ce segment, c'est-à-dire $\|(0,0,1)^T - (0,1,0)^T\| = \sqrt{2}$. Le rayon est donc $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit α le paramétrage du cercle de rayon r centré en à l'origine dans le plan xy

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir le cercle voulu, on effectue une rotation de $\frac{\pi}{4}$ autour de l'axe des x. Cette matrice de rotation est

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Pour alléger, on remplace $\frac{\sqrt{2}}{2}$, par r. On obtient

$$R \circ \alpha(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r2\sin t \\ r^2 \sin t \end{pmatrix}.$$

Enfin, on effectue une translation de P pour déplacer le centre du cercle au bon endroit. La paramétrage est

$$\gamma(t) = R \circ \alpha(t) + P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \\ \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Attention ! L'ordre des opérations est importante : on applique la rotation et ensuite la translation.

On a maintenant plusieurs intégrales à calculer. Commençons par calculer $\mathrm{d}s$. On a

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r^2\cos t \\ -r^2\cos t \end{pmatrix}, \qquad \|\gamma'(t)\|^2 = r^2\sin^2 t + 2r^4\cos^2 t = \frac{1}{2}\sin^2 t + \frac{1}{2}\cos^2 t = \frac{1}{2}.$$

On a donc $\|\gamma'(t)\| = r$. D'abord, la masse totale : on a

$$\begin{aligned}\rho \circ \gamma(t) &= \left(\tfrac{1}{2}\sin t + \tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}\sin t + \tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\cos^2 t - \tfrac{1}{2}\sin t + \tfrac{1}{2} \\ &= -\tfrac{1}{4}\sin^2 t + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\cos^2 t - \tfrac{1}{2}\sin t + \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sin t,\end{aligned}$$

ensuite on trouve

$$m = \int_\gamma \rho \,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sin t\right) r \,\mathrm{d}t = \pi r = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

Soit $C = (x_m, y_m, z_m)$ le centre de masse. On a

$$\begin{aligned}m x_m &= \int_\gamma x\rho \,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{2\pi} r\cos t\big(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sin t\big) r \,\mathrm{d}t = 0.\end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}m y_m &= \int_\gamma y\rho \,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{2\pi} \big(\tfrac{1}{2}\sin t + \tfrac{1}{2}\big)\big(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sin t\big) r \,\mathrm{d}t \\ &= r\int_0^{2\pi} \big(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sin^2 t\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{r}{4}(2\pi - \pi) \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{8}.\end{aligned}$$

Il suit que $y_m = \frac{1}{4}$.

Enfin, pour z_m, on trouve

$$\begin{aligned}m z_m &= \int_\gamma z\rho \,\mathrm{d}s \\ &= \int_\gamma z^2 \,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{2\pi} \big(\tfrac{1}{4}\sin^2 t - \tfrac{1}{2}\sin t + \tfrac{1}{4}\big) r \,\mathrm{d}t \\ &= \tfrac{r}{4}\big(\pi - \tfrac{\pi}{2}\big) \\ &= \frac{r\pi}{8}.\end{aligned}$$

On a donc $z_m = \frac{1}{8}$.

Conclusion : Le centre de masse est $C = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$.

Exercice 5. Soit C une courbe dans $\mathbb{R}^n$, où $n = 2$ ou 3. On appellera une *symétrie*[2] de C une application linéaire inversible $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui est telle que

i. L préserve C, à savoir $L(C) = C$;

ii. si C a une densité ρ, alors L la préserve : $\rho \circ L = \rho$.

On définit une symétrie d'une surface S de la même manière.

a) Montrer que si L est une symétrie, alors L préserve le centre de masse, c'est-à-dire que $L(C_M) = C_M$.

b) Montrer que l'ellipse, avec une densité uniforme de 1, possède les deux symétries suivantes

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui sont respectivement la réflexion selon l'axe des x et la réflexion selon l'axe des y. En déduire que le centre de masse se trouve à l'origine.

Indice. Regardez l'équation cartésienne de l'ellipse et vérifiez que $S_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifie cette même équation. De même pour S_y.

c) Soit $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ une courbe contenue dans le plan yz. Supposons de plus que $\gamma_3(t) > 0$ pour tout t. Soit Σ la surface de révolution obtenue par la rotation de γ autour de l'axe des z. Montrer que les rotations d'angle θ autour de l'axe des z, à savoir

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sont des symétries de Σ, en supposant que la densité de Σ est uniforme et constante. En déduire que le centre de masse de Σ se trouve sur l'axe des z.

Exercice 6. Trouver le centre de masse des courbes ou des surfaces suivantes sans faire de calculs. Utiliser plutôt l'exercice 5.

a) L'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec la densité $\rho(x, y) = x^4 + y^4$.

b) Le triangle équilatéral ayant des côtés de longueur 1, avec une densité uniforme.

Indice. Montrer que ce triangle possède trois rotations comme symétries (ou trois réflexions).

c) L'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, avec la denstité $\rho(x, y, z) = |xyz|$.

[2] Une symétrie est habituellement un élément d'un groupe (dans notre cas, c'est le groupe des matrices inversibles) qui agit sur l'objet d'étude (dans notre cas, une courbe et sa densité) et qui le préserve. Il est possible que « symétrie » prenne d'autres sens selon les contextes. Les matrices nous suffiront.

d) Le cube ayant des arêtes de longueur 1, avec une densité uniforme de 1.

2. Intégrale curviligne

Exercice 7. Calculer l'intégrale curviligne $\int_\gamma F \bullet \mathrm{d}\vec{s}$, dans le sens positif (anti-horaire) lorsque rien est indiquer, où

a) $F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ et γ est le cercle $x^2 + y^2 = 1$ dans le sens positif

b) $F(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ et γ est la courbe polaire $r = \cos\theta$

c) $F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et γ est la cardioïde $r = 1 + \cos\theta$

d) $F(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x-1} \\ xy \end{pmatrix}$ et $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$

e) $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} ze^{x^2} \\ xyz \\ z \end{pmatrix}$ et γ est l'intersection de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du plan $z = 0$

f) $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z^2 e^{y^2} \end{pmatrix}$ et γ est l'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 1$ et du plan $z = 1$

g) $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\gamma = \begin{pmatrix} t\cos(4t) \\ t\sin(4t) \\ t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$

h) $F(x, y) = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$ et $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t-1 \\ t^2 \\ \log t \end{pmatrix}$, $t \in [1, e]$

Solution. a) Le cercle est paramétré, comme à l'habitude, par $\gamma(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cos t \\ \sin t \end{smallmatrix}\right)$. On a donc $\gamma'(t) = \left(\begin{smallmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{smallmatrix}\right)$. L'intégrale est

$$\begin{aligned} \int_\gamma F \bullet \mathrm{d}\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \sin^2 t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t)\, \mathrm{d}t \\ &= 0. \end{aligned}$$

d) On a $\gamma'(t) = \left(\begin{smallmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{smallmatrix}\right)$ et $F \circ \gamma(t) = \left(\begin{smallmatrix} e^{t^2-1} \\ t^5 \end{smallmatrix}\right)$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_\gamma F \bullet \mathrm{d}\vec{s} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} e^{t^2-1} \\ t^5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (2te^{t^2-1} + 3t^7)\, \mathrm{d}t \\ &= e^{t^2-1}\Big|_0^1 + \frac{3t^8}{8}\Big|_0^1 \end{aligned}$$

$$= 1 - e^{-1} + \frac{3}{8} = \frac{11}{8} - e^{-1}.$$

e) La courbe correspond au cercle centré à l'origine de rayon 1 contenu dans le plan xy. On a donc

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a ensuite

$$F \circ \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il est maintenant évident que l'intégrale vaut 0.

Exercice 8. Refaire les intégrales du 7acg en trouvant un champ scalaire f tel que $\nabla f = F$.

Solution. g) Le champ scalaire $f(x, y, z) = x + z$ fait l'affaire. On pose

$$a = \gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \gamma(2\pi) = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \\ 2\pi \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\int_\gamma F \bullet \mathrm{d}\vec{s} = f(b) - f(a) = 4\pi - 0 = 4\pi.$$

Exercice 9. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_C e^x \,\mathrm{d}x$, C : l'arc de la courbe $x = y^3$ de $(-1, -1)$ à $(1, 1)$

b) $\displaystyle\int_C y \,\mathrm{d}x$, C : petit arc de l'ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ entre $(4, 0)$ et $(0, 2)$

c) $\displaystyle\int_C (y \,\mathrm{d}x + z \,\mathrm{d}y + x \,\mathrm{d}z)$, C : $x = \sqrt{t}$, $y = t$, $z = t^2$, $1 \le t \le 4$

d) $\displaystyle\int_C \Big[(y + z) \,\mathrm{d}x + (x + z) \,\mathrm{d}y + (x + y) \,\mathrm{d}z\Big]$, C : segments de droites allant de $(0, 0, 0)$ à $(1, 0, 1)$ et de $(1, 0, 1)$ à $(0, 1, 2)$

Solution. c) On rappelle la notation $\mathrm{d}x = x'(t)\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = y'(t)\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}z = z'(t)\mathrm{d}t$. On a

$$\int_C (y \,\mathrm{d}x + z \,\mathrm{d}y + x \,\mathrm{d}z) = \int_1^4 \left(t \frac{1}{2\sqrt{t}} + t^2 + 2t\sqrt{t} \right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_1^4 \left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{2} + t^2 + 2t^{\frac{3}{2}} \right) \mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_1^4 \\
&= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + \frac{64-1}{3} + \frac{4}{5}(32-1) \\
&= \frac{70}{3} + \frac{124}{5}.
\end{aligned}
$$

Exercice 10. Soit le champ de vecteurs $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $F(x,y) = \binom{y}{x}$.

a) Montrer que $\operatorname{rot} F = \vec{0}$ partout dans $\mathbb{R}^2$.

b) On soupçonne que F est conservatif, donc en supposant que F possède la propriété d'indépendance du chemin, calculer directement

$$f(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} F \bullet \mathrm{d}\vec{s}.$$

Vérifiez votre réponse en calculant ∇f pour voir si $\nabla f = F$.

Solution. a) On a

$$\operatorname{rot}(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Si F a la propriété d'indépendance du chemin, on peut intégrer sur n'importe quel chemin. Pusique $\mathbb{R}^2$ est convexe, on prend des segments de droites. Soit $\gamma(t) = \binom{tx}{ty}$, $t \in [0,1]$, le segment de droite entre l'origine et $(x,y)^T$. On a

$$f(x,y) = \int_\gamma F \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} ty \\ tx \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^1 (tyx + txy)\,\mathrm{d}t = 2xy \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = xy.$$

Il est simple de voir que $\nabla f = (y,x) = F(x,y)$.

Exercice 11. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un domaine et soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ un champ scalaire. Le but de l'exercice est de montrer que si $\nabla f = 0$ partout sur D, alors f est une fonction constante.

a) Soit $\vec{a}, \vec{b} \in D$ deux points distincts. Soit $\vec{r}\colon [a,b] \to D$ une courbe de classe C^1 joignant $\vec{a}$ à $\vec{b}$ ($\vec{r}$ existe puisque D est un domaine, donc connexe par arcs). On pose

$$g(t) = f\big(\vec{r}(t)\big).$$

Montrer que $g'(t) = 0$ pour tout $t \in [a,b]$.

b) Conclure que $f(\vec{a}) = f(\vec{b})$. En déduire que f est constante.

Solution. a) On a $g'(t) = \nabla f(\vec{r}(t))\vec{r}\,'(t) = 0$.

b) Puisque g est constante, on a $g(1) = g(0)$, c'est-à-dire $f(\vec{b}) = f(\vec{a})$. Puisque $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont quelconques, on déduit que f est constante.

Exercice 12. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine et soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ un champ scalaire de classe C^1. On pose

$$F(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \nabla f \bullet \mathrm{d}\vec{s} \qquad \text{et} \qquad G(x,y) = \int_{(1,1)}^{(x,y)} \nabla f \bullet \mathrm{d}\vec{s}.$$

Montrer qu'il existe une constante C telle que $F(x,y) = G(x,y) + C$. Trouver une expression pour C en terme de f (ou de ∇f).

Indice. Utilisez le numéro précédent.

Solution. On pose $h(x,y) = F(x,y) - G(x,y)$. On a

$$\nabla h(x,y) = \nabla f(x,y) - \nabla f(x,y) = 0.$$

Par le numéro 11, il suit que h est constante, disons $h(x,y) = C$. D'autre part, on a

$$C = h(1,1) = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \nabla f \bullet \mathrm{d}\vec{s} - \int_{(1,1)}^{(1,1)} \nabla f \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \nabla f \bullet \mathrm{d}\vec{s}.$$

Ainsi, il suit que

$$F(x,y) = G(x,y) + C,$$

c'est-à-dire

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} \nabla f \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \nabla f \bullet \mathrm{d}\vec{s} + \int_{(1,1)}^{(x,y)} \nabla f \bullet \mathrm{d}\vec{s}.$$

Exercice 13. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine. Montrer que si $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ est un champ conservatif de classe C^1, alors

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

pour tout $0 \leq i \neq j \leq n$, où F_k est la k^{e} composante de F.

Solution. Puisque F est conservatif, il existe f, un champ sclaire, tel que $\nabla f = F$. Puisque F est de classe C^1, on voit que f est de classe C^2. On a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j},$$

quelque soit $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, par le théorème de Scwarz. Puisque $F_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$, il suit que

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_k}.$$

Exercice 14. Déterminer si les champs de vecteurs suivants sont conservatifs. S'ils le sont, trouver un potentiel. (Vous pouvez utiliser le numéro précédent pour voir s'ils ne sont pas conservatif.)

a) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

b) $F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$

c) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ z+\frac{x^2}{2} \\ y+z \end{pmatrix}$

d) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{y+z} \\ e^{x+z} \\ e^{x+y} \end{pmatrix}$

Solution. a) On cherche un champ scalaire f tel que $\nabla f = F$. Ainsi, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x \quad \Rightarrow \quad f(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + h(y,z).$$

On dérive par rapport à y : $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y}$. On également $\frac{\partial f}{\partial y} = y$, donc $h(y,z) = \frac{1}{2}y^2 + k(z)$.

De façon similaire, on a $\frac{\partial k}{\partial z} = z$. On conclut que $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$.

d) Le champ de vecteurs n'est pas conservatif. Par exemple, on a

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = e^{y+z} \neq \frac{\partial F_2}{\partial x} = e^{x+z}.$$

Exercice 15. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine. Supposons que le champ de vecteurs $F\colon D \to \mathbb{R}^2$ soit conservatif et non nul partout sur D. Alors le champ de vecteur

$$G(x,y) = \frac{F(x,y)}{\|F(x,y)\|^2}$$

est-il conservatif ?

Solution. Non. Par exemple, soit le champ scalaire $f(x,y) = xy$ sur $D = \{(x-2)^2+y^2 < 1\}$. Alors $F(x,y) = \nabla f(x,y)^T = (y,x)^T$ est conservatif. Par contre,

$$G(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

n'est pas conservatif, puisque

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

qui ne sont pas égales.

Exercice 16. *Indice d'une courbe selon un champ de vecteurs.*

Soit $\vec{v}(x,y) = \big(v_1(x,y), v_2(x,y)\big)^T$ un champ de vecteurs du plan. On note les dérivées partielles de v_j par v_{jx} et v_{jy}. Soit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe de classe C^1. On définit *l'indice de γ selon $\vec{v}$* par

$$\operatorname{Ind}(\gamma, \vec{v}) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \left(\frac{v_1 \,\mathrm{d}v_2 - v_2 \,\mathrm{d}v_1}{v_1^2 + v_2^2} \right),$$

où[3] $\mathrm{d}v_j = v_{jx}\,\mathrm{d}x + v_{jy}\,\mathrm{d}y$.

1. a) Soit $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ le cercle unité. Calculer l'indice de γ selon le champ $\vec{v} = (x, y)$.
   b) Soit $\gamma\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ donnée par $x^3 = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Calculer l'indice de γ selon le champ $\vec{v} = (x^3, y)$.
2. Calculer $\nabla \arctan\left(\frac{v_2(x,y)}{v_1(x,y)}\right)$.
3. Rappelons qu'avec $\arctan\left(\frac{v_2(x,y)}{v_1(x,y)}\right)$, on peut obtenir l'angle entre $\vec{v}$ et l'horizontale. Donner une interprétation de l'indice d'une courbe.

3. Intégrale de flux

Exercice 17. Calculer le flux des champs de vecteurs suivants au travers de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, avec le vecteur normal qui pointe à l'extérieur.

a) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ b) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$

Solution. c) Soit S la sphère de l'énoncé. Le vecteur normal de la sphère a déjà été calculé en classe avec le paramétrage longitude-latitude. Il est donné par

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos^2\varphi \\ \sin\theta\cos^2\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on a $F_3 \circ \Sigma(\theta, \varphi) = \cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\cos^2\varphi = \cos^2\varphi$. On a ensuite

$$\int_S F \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos^2\varphi \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos\theta\cos^2\varphi \\ \sin\theta\cos^2\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix} \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

[3] Pour comprendre la notation, on remarque que si $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est une courbe, alors on a $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x'(t)$ et ceci motive la notation $\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t$. Ensuite, on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_1 \circ \gamma(t) = v_{1x}x'(t) + v_{1y}y'(t)$, ce qui motive la notation $\mathrm{d}v_1 = v_{1x}\,\mathrm{d}x + v_{1y}\,\mathrm{d}y$. Notons que ceci est seulement une *notation*, on ne lui définit pas de sens mathématique. En géométrie, on les appelle des *formes différentielles* et on leur donne alors un sens mathématique, mais ceci sort du cadre du cours.

$$= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos^3\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= 0.$$

Exercice 18. Calculer le flux des champs de vecteurs suivants au travers du cylindre $x^2+y^2 = 1$, $z \in [0,1]$, avec l'orientation déterminée par $\vec{n}$ au point $(1,0,0)^T$ dirigé vers l'axe des x positifs.

a) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ e^z \end{pmatrix}$ b) $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ xyz \end{pmatrix}$ c) $r(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz \\ xyz \\ xe^{z^2} \end{pmatrix}$

Solution. On utilise le paramétrage du cylindre

$$\Sigma(\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{pmatrix}, \quad (\theta,z) \in [0,2\pi]\times[0,1].$$

Calculons le vecteur normal

$$\mathrm{d}\Sigma(\theta,z) = \begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{N} = \begin{vmatrix} i & -\sin\theta & 0 \\ j & \cos\theta & 0 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On doit vérifier si l'orientation est bonne. On a $\Sigma(0,0) = (1,0,0)^T$ et le vecteur normal en ce point est $\vec{N}(0,0) = (1,0,0)^T$. Il pointe dans la direction de l'axe des x positifs, comme demandé.

b) On a

$$g\circ\Sigma(\theta,z) = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ \cos\theta\sin\theta z \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad g\circ\Sigma(\theta,z) \bullet N = \cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta + 0.$$

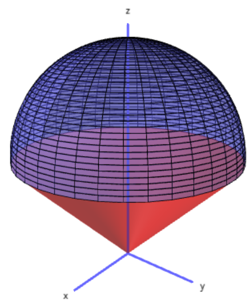
On calcule l'intégrale

$$\int_S g \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2\cos\theta\sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$
$$= 0.$$

Exercice 19. Calculer le flux des champs de vecteurs suivants au travers de Γ, la réunion du cône $C : x^2+y^2 = z^2$, $z \in [0,1]$ et de la partie de sphère $S : x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$, $z \in [1,2]$. Le vecteur normal pointe vers l'extérieur.

a) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$

Solution. Voici une image de la surface Γ.



C'est une demi-sphère au-dessus d'un cône de telle sorte que la surface est fermée.

On paramétrise le cône et la demi-sphère respectivement par

$$\Sigma(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ r \end{pmatrix}, \quad (r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi], \qquad \text{et} \qquad \Pi(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi + 1 \end{pmatrix}, \quad (\theta,\varphi) \in [0,2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

On a déjà calculé le vecteur normal de la sphère, il est donné par

$$\vec{N}_\Pi = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos^2\varphi \\ \sin\theta\cos^2\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Pour le vecteur normal du cône, on a

$$\mathrm{d}\Sigma(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{N}_\Sigma = \begin{vmatrix} i & \cos\theta & -r\sin\theta \\ j & \sin\theta & r\cos\theta \\ k & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -r\cos\theta \\ -r\sin\theta \\ r \end{pmatrix}.$$

On doit vérifier si $\vec{N}_\Sigma$ pointe vers l'extérieur. En $\left(\frac{1}{2},0\right)$, on a $\Sigma\left(\frac{1}{2},0\right) = \left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)^T$ et $\vec{N}_\Sigma\left(\frac{1}{2},0\right) = \left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)^T$. Ce vecteur pointe vers l'intérieur, car la première composante est négative, alors que le point sur la surface à une première composante positive. Dans ce cas-ci, comme on peut l'imaginer sur la figure, le vecteur normal pointe dans la surface. On doit donc faire nos prochains calculs avec $-\vec{N}_\Sigma$.

a) On a

$$\int_\Gamma F \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \int_C F \bullet \mathrm{d}\vec{S} + \int_S F \bullet \mathrm{d}\vec{S}.$$

On calcule l'intégrale sur le cône. On a

$$F \circ \Sigma(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad F \circ \Sigma \bullet (-\vec{N}_\Sigma) = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + 0 = r^2.$$

$$\int_C F \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}r$$
$$= 2\pi \frac{r^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

On calcule maintenant l'intégrale sur le cône. On a

$$F \circ \Pi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F \circ \Pi \bullet \vec{N}_\Pi = \cos^2\theta\cos^3\varphi + \sin^2\theta\cos^3\varphi = \cos^3\varphi.$$

Pour l'intégrale, on a

$$\int_S F \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos^3\varphi \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi$$
$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{pi}{6}\Big[9\sin x + \sin(3x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{6}(9-1)$$
$$= \frac{4\pi}{3}.$$

Conclusion : $\int_\Gamma F \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi$.

Exercice 20. Calculer les intégrales de flux suivantes, où Σ est le paramétrage d'une surface et F est un champ de vecteurs.

a) $\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} uv \\ u^2+v^2 \\ 2u \end{pmatrix}$, $(u,v) \in [-1,1]^2$, et $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

b) $\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \cos u \sin v \\ v \end{pmatrix}$, $(u,v) \in [0,2\pi]^2$, et $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2e^{yz} \\ 0 \end{pmatrix}$;

c) $\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u^2-v^2 \\ 2uv \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}$, $(u,v) \in [-1,1]^2$, et $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$;

d) $\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u+1 \\ u^2+uv \\ v+1 \end{pmatrix}$, $(u,v) \in [0,1] \times [-1,0]$, et $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ xz \\ z \end{pmatrix}$;

e) $\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u\log v \\ u+v \\ v \end{pmatrix}$, $(u,v) \in [0,1] \times [1,e]$, et $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Solution. Voici les solutions sans démarche.

a)
$$N(u,v) = \begin{pmatrix} -4v \\ 2u \\ -2u^2 + 2v^2 \end{pmatrix} \qquad F \circ \Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 2u^2 v \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F \circ \Sigma(u,v) \bullet N(u,v) = -8u^2v^2 + 2u \qquad \int_\Sigma F \bullet \,\mathrm{d}\vec{S} = -\tfrac{32}{9}$$

b)
$$N(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \sin u \\ -\cos u \sin u \cos v \end{pmatrix} \qquad F \circ \Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^2 u e^{v \cos u \sin v} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F \circ \Sigma(u,v) \bullet N(u,v) = \sin u \cos^2 u e^{v \cos u \sin v} \qquad \int_\Sigma F \bullet \,\mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

c)
$$N(u,v) = \begin{pmatrix} 4v^2 - 4u^2 \\ 2uv \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix} \qquad F \circ \Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 \\ 2uv \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}$$

$$F \circ \Sigma(u,v) \bullet N(u,v) = -16u^2v^2 \qquad \int_\Sigma F \bullet \,\mathrm{d}\vec{S} = -\tfrac{64}{9}.$$

Exercice 21. Calculer les intégrales de flux suivantes, où S et F sont respectivement la surface et le champ de vecteurs suivants :

a) S est la partie de paraboloïde $z = x^2 + y^2$ contenue dans le cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$, avec le vecteur normal dont la troisième composante est négative.

b) S est l'union de l'hémisphère nord de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du disque $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$, et $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec N qui point à l'extérieur de S.

c) S est le cube unité $[0,1]^3$ et $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^{x^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec N qui pointe à l'extérieur de S.

Exercice 22. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine, $\gamma\colon [a,b] \to D$ une courbe dans le plan et $F\colon D \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs. Le flux de F au travers γ est donné par

$$\int_\gamma F \bullet \,\mathrm{d}\vec{n} := \int_\gamma F \bullet \vec{n} \,\mathrm{d}s,$$

où $\vec{n}$ est un vecteur normal unitaire à droite de la tangente. (Autrement dit, si l'index de la main gauche point dans la direction de la tangente, alors la normale $\vec{n}$ doit pointer dans la direction du pouce.)

a) Montrer que si γ est régulière, alors $\vec{n} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix}$, où γ_1 et γ_2 sont les composantes de γ. Ceci motive la notation suivante.

Notation. On écrit $\mathrm{d}\vec{n} = \vec{n}\,\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} \mathrm{d}y \\ -\mathrm{d}x \end{pmatrix}$. De plus, si $F(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$, où $P, Q \colon D \to \mathbb{R}$ sont les composantes de F, alors on écrit

$$\int_\gamma F \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}s = \int_\gamma F \bullet \mathrm{d}\vec{n} = \int_\gamma F \bullet \begin{pmatrix} \mathrm{d}y \\ -\mathrm{d}x \end{pmatrix} = \int_\gamma \Big(P(x,y)\,\mathrm{d}y - Q(x,y)\,\mathrm{d}x\Big),$$

où $\mathrm{d}x = \gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}y = \gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Calculer l'intégrale de flux $\int_\gamma F \bullet \mathrm{d}\vec{n}$, où

i) γ est le cercle $x^2 + y^2 = 1$, dans le sens positif, et $F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;

ii) γ est l'ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, dans le sens positif, et $F(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$;

iii) γ est le triangle dont les sommets sont $(-1,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$, dans le sens positif, et $F(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solution. On sait que le vecteur $\begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix}$ est tangent à la courbe, donc le vecteur $N = \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\gamma'(t)$, puisque $\gamma'(t) \bullet N(t) = 0$. Ainsi, le vecteur $\vec{n} = N/\|N\|$ est aussi orthogonal à $\gamma'(t)$.

Il est y a deux orientations possible pour $\vec{n}$. On dit que $\vec{n}$ est « à droite de la tangente ». Ceci signifie que $\det(\gamma'(t), \vec{n}) < 0$, car un changement de repère de $(0, e_1, e_2)$ vers $(\gamma(t), \gamma'(t), \vec{n})$ inverse les axes. Vérifions que le $\vec{n}$ choisi satisfait à notre condition :

$$\det(\gamma'(t), \vec{n}) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\begin{vmatrix} \gamma_1'(t) & \gamma_2'(t) \\ \gamma_2'(t) & -\gamma_1'(t) \end{vmatrix} = \frac{-\gamma_1'(t)^2 - \gamma_2'(t)^2}{\|\gamma'(t)\|} < 0.$$

a) *i)* Avec le paramétrage habituel $\gamma(t) = \binom{\cos t}{\sin t}$, on a

$$\int_\gamma F \bullet \mathrm{d}\vec{n} = \int_\gamma (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \int_0^{2\pi} \big(\cos t \cos t\,\mathrm{d}t - \sin t(-\sin t)\,\mathrm{d}t\big) = 2\pi.$$

Exercice 23. Soit le champ de vecteur

$$F(x,y,z) = \frac{1}{\big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\big)^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Soit S_r la sphère de rayon r centrée à l'origine. Montrer que $\displaystyle\int_{S_r} F \bullet \mathrm{d}\vec{S}$ ne dépend pas de r. Autrement dit, pour tout $r_1 \neq r_2$ positifs, montrer que

$$\int_{S_{r_1}} F \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_{r_2}} F \bullet \mathrm{d}\vec{S}.$$

Remarque. On reconnaît ici le champ de force d'une particule électrique ponctuelle placée à l'origine. Dans un contexte physique, la valeur de cette intégrale dépend de la charge électrique contenue dans la surface fermée sur laquelle on calcule le flux, mais pas de la surface elle-même. On expliquera cela mathématiquement plus tard dans le cours à l'aide du théorème de Stokes.