

Calcul 2

Intégrales sur les courbes et les surfaces

1. Intégrale d'un champ scalaire

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes, où C ou γ sont des courbes.

- a) $\int_{\gamma} y \, ds$, $\gamma : x(t) = t^2$, $y(t) = 2t$, $0 \leq t \leq 3$ b) $\int_{\gamma} \frac{y}{x} \, ds$, $\gamma : x = t^3$, $y = t^4$, $1 \leq t \leq 2$
- c) $\int_C x \, ds$, $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$ d) $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) \, ds$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 2\pi$
- e) $\int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$, $\gamma : \text{spirale polaire } r = t$, $t \in [0, 1]$ f) $\int_{\gamma} x e^y \, ds$, $\gamma : \text{segment de droite allant de } (2, 0) \text{ à } (5, 4)$
- g) $\int_{\gamma} y^2 z \, ds$, $\gamma : \text{segment de droite allant de } (3, 1, 2) \text{ à } (1, 2, 5)$ h) $\int_C x e^{yz} \, ds$, $\gamma : \text{segment de droite allant de } (0, 0, 0) \text{ à } (1, 2, 3)$
- i) $\int_{\gamma} e^{x+z} \, ds$, $\gamma : x = 2t$, $y = \sqrt{3}t^2$, $z = t^3$, $0 \leq t \leq 1$ j) $\int_C xy \, ds$, $C : x = \cosh(t)$, $y = \sinh(t)$, $t \in [0, 1]$
- l) $\int_C \log(x^2 + y^2) \, ds$, $C : \text{arc de cercle de rayon } \sqrt{2} \text{ passant par } (1, -1) \text{ et } (1, 1)$ m) $\int_{\gamma} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \, ds$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Exercice 2. On considère la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ paramétrée par

$$\Sigma(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

On rappelle que

$$\|\vec{N}\| = |\cos \varphi|.$$

(Refaites le calcul au besoin.) Calculer $\int_S F \, dS$, avec F un champ scalaire et S , une partie de la sphère, où

- a) $F(x, y, z) = x + y$ et S est l'hémisphère nord b) $F(x, y, z) = xz$ et S est l'hémisphère sud
- c) $F(x, y, z) = x^2 + y^2$ et S est la partie de la sphère au-dessus du plan $z = \frac{1}{2}$ d) $F(x, y, z) = z^2$ et S est la partie entre le méridien³ à 0° et le méridien à 45°

¹ Le méridien à θ degré est l'arc de grand cercle allant du pôle nord au pôle sud et qui fait un angle θ avec le demi-plan $y = 0$, $x \geq 0$.

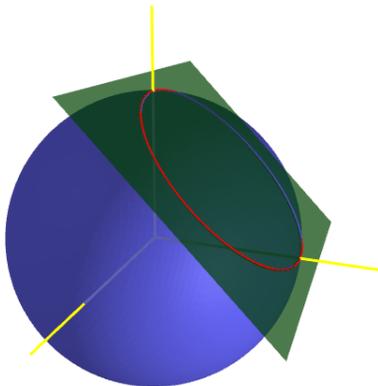
Exercice 3. Calculer la moyenne du champ scalaire f le long de la courbe C , où

- a) $f(x, y) = xe^{y^2}$ et C est le segment de droite de $(0, 0, 0)$ à $(1, 1, 0)$
- b) $f(x, y) = y$ et C est la partie de la courbe $x = y^2$, $x \in [0, 1]$
- c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et C est la courbe $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \cos(8t) \\ t \sin(8t) \\ t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$
- d) $f(x, y) = xy$ et C est la frontière du demi-disque $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$

Exercice 4. Calculer le centre de masse de la courbe C ayant comme densité ρ , où

- a) C est les deux segments de droite joignant $(-1, 0)$ à $(0, 1)$ et $(0, 1)$ à $(1, 0)$ et $\rho(x, y) = x^2 + y$
- b)* C est la courbe d'intersection de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du plan $y + z = 1$ et $\rho(x, y, z) = yz - \frac{1}{2}x^2$

*Pour le b), une façon possible est de partir du cercle $(r \cos t, r \sin t, 0)^T$ et d'effectuer une rotation et une translation qui déplace ce cercle au bon endroit. Il faudra également déterminer la constante r (qui ne dépend pas de t). Voir la figure.



Exercice 5. Soit C une courbe dans \mathbb{R}^n , où $n = 2$ ou 3 . On appellera une *symétrie*² de C une application linéaire inversible $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui est telle que

- i. L préserve C , à savoir $L(C) = C$;
- ii. si C a une densité ρ , alors L la préserve : $\rho \circ L = \rho$.

On définit une symétrie d'une surface S de la même manière.

- a) Montrer que si L est une symétrie, alors L préserve le centre de masse, c'est-à-dire que $L(C_M) = C_M$.

² Une symétrie est habituellement un élément d'un groupe (dans notre cas, c'est le groupe des matrices inversibles) qui agit sur l'objet d'étude (dans notre cas, une courbe et sa densité) et qui le préserve. Il est possible que « symétrie » prenne d'autres sens selon les contextes. Les matrices nous suffiront.

b) Montrer que l'ellipse, avec une densité uniforme de 1, possède les deux symétries suivantes

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui sont respectivement la réflexion selon l'axe des x et la réflexion selon l'axe des y . En déduire que le centre de masse se trouve à l'origine.

Indice. Regardez l'équation cartésienne de l'ellipse et vérifiez que $S_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifie cette même équation. De même pour S_y .

c) Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe contenue dans le plan yz . Supposons de plus que $\gamma_3(t) > 0$ pour tout t . Soit Σ la surface de révolution obtenue par la rotation de γ autour de l'axe des z . Montrer que les rotations d'angle θ autour de l'axe des z , à savoir

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sont des symétries de Σ , en supposant que la densité de Σ est uniforme et constante. En déduire que le centre de masse de Σ se trouve sur l'axe des z .

Exercice 6. Trouver le centre de masse des courbes ou des surfaces suivantes sans faire de calculs. Utiliser plutôt l'exercice 5.

a) L'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec la densité $\rho(x, y) = x^4 + y^4$.

b) Le triangle équilatéral ayant des côtés de longueur 1, avec une densité uniforme.

Indice. Montrer que ce triangle possède trois rotations comme symétries (ou trois réflexions).

c) L'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, avec la densité $\rho(x, y, z) = |xyz|$.

d) Le cube ayant des arêtes de longueur 1, avec une densité uniforme de 1.

2. Intégrale curviligne

Exercice 7. Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\gamma} F \bullet d\vec{s}$, dans le sens positif (anti-horaire) lorsque rien est indiqué, où

- a) $F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ et γ est le cercle $x^2 + y^2 = 1$ dans le sens positif
- b) $F(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ et γ est la courbe polaire $r = \cos \theta$
- c) $F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et γ est la cardioïde $r = 1 + \cos \theta$
- d) $F(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x-1} \\ xy \end{pmatrix}$ et $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$
- e) $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} ze^{x^2} \\ xyz \\ z \end{pmatrix}$ et γ est l'intersection de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du plan $z = 0$
- f) $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z^2 e^{y^2} \end{pmatrix}$ et γ est l'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 1$ et du plan $z = 1$
- g) $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\gamma = \begin{pmatrix} t \cos(4t) \\ t \sin(4t) \\ t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$
- h) $F(x, y) = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$ et $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t-1 \\ t^2 \\ \log t \end{pmatrix}$, $t \in [1, e]$

Exercice 8. Refaire les intégrales du 7acg en trouvant un champ scalaire f tel que $\nabla f = F$.

Exercice 9. Calculer les intégrales suivantes.

- a) $\int_C e^x dx$, C : l'arc de la courbe $x = y^3$ de $(-1, -1)$ à $(1, 1)$
- b) $\int_C y dx$, C : petit arc de l'ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ entre $(4, 0)$ et $(0, 2)$
- c) $\int_C (y dx + z dy + x dz)$, C : $x = \sqrt{t}$, $y = t$, $z = t^2$, $1 \leq t \leq 4$
- d) $\int_C [(y+z) dx + (x+z) dy + (x+y) dz]$, C : segments de droites allant de $(0, 0, 0)$ à $(1, 0, 1)$ et de $(1, 0, 1)$ à $(0, 1, 2)$

Exercice 10. Soit le champ de vecteurs $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $F(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

- a) Montrer que $\text{rot } F = \vec{0}$ partout dans \mathbb{R}^2 .

- b) On soupçonne que F est conservatif, donc en supposant que F possède la propriété d'indépendance du chemin, calculer directement

$$f(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} F \bullet d\vec{s}.$$

Vérifiez votre réponse en calculant ∇f pour voir si $\nabla f = F$.

Exercice 11. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un domaine et soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire. Le but de l'exercice est de montrer que si $\nabla f = 0$ partout sur D , alors f est une fonction constante.

- a) Soit $\vec{a}, \vec{b} \in D$ deux points distincts. Soit $\vec{r}: [a, b] \rightarrow D$ une courbe de classe C^1 joignant \vec{a} à \vec{b} (\vec{r} existe puisque D est un domaine, donc connexe par arcs). On pose

$$g(t) = f(\vec{r}(t)).$$

Montrer que $g'(t) = 0$ pour tout $t \in [a, b]$.

- b) Conclure que $f(\vec{a}) = f(\vec{b})$. En déduire que f est constante.

Exercice 12. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine et soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire de classe C^1 . On pose

$$F(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \nabla f \bullet d\vec{s} \quad \text{et} \quad G(x, y) = \int_{(1,1)}^{(x,y)} \nabla f \bullet d\vec{s}.$$

Montrer qu'il existe une constante C telle que $F(x, y) = G(x, y) + C$. Trouver une expression pour C en terme de f (ou de ∇f).

Indice. Utilisez le numéro précédent.

Exercice 13. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine. Montrer que si $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ conservatif de classe C^1 , alors

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

pour tout $0 \leq i \neq j \leq n$, où F_k est la k^{e} composante de F .

Exercice 14. Déterminer si les champs de vecteurs suivants sont conservatifs. S'ils le sont, trouver un potentiel. (Vous pouvez utiliser le numéro précédent pour voir s'ils ne sont pas conservatif.)

$$\begin{array}{ll} \text{a) } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \text{b) } F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \\ \text{c) } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ z + \frac{x^2}{2} \\ y + z \end{pmatrix} & \text{d) } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{y+z} \\ e^{x+z} \\ e^{x+y} \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 15. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine. Supposons que le champ de vecteurs $F: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ soit conservatif et non nul partout sur D . Alors le champ de vecteur

$$G(x, y) = \frac{F(x, y)}{\|F(x, y)\|^2}$$

est-il conservatif?

Exercice 16. *Indice d'une courbe selon un champ de vecteurs.*

Soit $\vec{v}(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))^T$ un champ de vecteurs du plan. On note les dérivées partielles de v_j par v_{jx} et v_{jy} . Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe de classe C^1 . On définit l'*indice de γ selon \vec{v}* par

$$\text{Ind}(\gamma, \vec{v}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left(\frac{v_1 dv_2 - v_2 dv_1}{v_1^2 + v_2^2} \right),$$

où³ $dv_j = v_{jx} dx + v_{jy} dy$.

- Soit $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ le cercle unité. Calculer l'indice de γ selon le champ $\vec{v} = (x, y)$.
 - Soit $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $x^3 = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Calculer l'indice de γ selon le champ $\vec{v} = (x^3, y)$.
- Calculer $\nabla \arctan\left(\frac{v_2(x, y)}{v_1(x, y)}\right)$.
- Rappelons qu'avec $\arctan\left(\frac{v_2(x, y)}{v_1(x, y)}\right)$, on peut obtenir l'angle entre \vec{v} et l'horizontale. Donner une interprétation de l'indice d'une courbe.

³ Pour comprendre la notation, on remarque que si $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est une courbe, alors on a $\frac{dx}{dt} = x'(t)$ et ceci motive la notation $dx = x'(t) dt$. Ensuite, on a $\frac{d}{dt} v_1 \circ \gamma(t) = v_{1x} x'(t) + v_{1y} y'(t)$, ce qui motive la notation $dv_1 = v_{1x} dx + v_{1y} dy$. Notons que ceci est seulement une *notation*, on ne lui définit pas de sens mathématique. En géométrie, on les appelle des *formes différentielles* et on leur donne alors un sens mathématique, mais ceci sort du cadre du cours.

3. Intégrale de flux

Exercice 17. Calculer le flux des champs de vecteurs suivants au travers de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, avec le vecteur normal qui pointe à l'extérieur.

$$\text{a) } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{b) } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{c) } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 18. Calculer le flux des champs de vecteurs suivants au travers du cylindre $x^2 + y^2 = 1$, $z \in [0, 1]$, avec l'orientation déterminée par $N(1, 0, 0)$ qui pointe dans la direction des x positifs.

$$\text{a) } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ e^z \end{pmatrix} \quad \text{b) } g(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ xyz \end{pmatrix} \quad \text{c) } r(x, y, z) = \begin{pmatrix} xyz \\ xyz \\ xe^{z^2} \end{pmatrix}$$

Exercice 19. Calculer le flux des champs de vecteurs suivants au travers de Γ , la réunion du cône $C : x^2 + y^2 = z^2$, $z \in [0, 1]$ et de la partie de sphère $S : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, $z \in [1, 2]$. Le vecteur normal pointe vers l'extérieur.

$$\text{a) } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 20. Calculer les intégrales de flux suivantes, où Σ est le paramétrage d'une surface et F est un champ de vecteurs.

$$\begin{aligned} \text{a) } \Sigma(u, v) &= \begin{pmatrix} uv \\ u^2 + v^2 \\ 2u \end{pmatrix}, (u, v) \in [-1, 1]^2, \text{ et } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \text{b) } \Sigma(u, v) &= \begin{pmatrix} \cos u \\ \cos u \sin v \\ v \end{pmatrix}, (u, v) \in [0, 2\pi]^2, \text{ et } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 e^{yz} \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \text{c) } \Sigma(u, v) &= \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ 2uv \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}, (u, v) \in [-1, 1]^2, \text{ et } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}; \\ \text{d) } \Sigma(u, v) &= \begin{pmatrix} u + 1 \\ u^2 + uv \\ v + 1 \end{pmatrix}, (u, v) \in [0, 1] \times [-1, 0], \text{ et } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ xz \\ z \end{pmatrix}; \\ \text{e) } \Sigma(u, v) &= \begin{pmatrix} u \log v \\ u + v \\ v \end{pmatrix}, (u, v) \in [0, 1] \times [1, e], \text{ et } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 21. Calculer les intégrales de flux suivantes, où S et F sont respectivement la surface et le champ de vecteurs suivants :

a) S est la partie de parabolôide $z = x^2 + y^2$ contenue dans le cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec le vecteur normal dont la troisième composante est négative.}$$

b) S est l'union de l'hémisphère nord de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du disque $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$,

$$\text{et } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } N \text{ qui point à l'extérieur de } S.$$

c) S est le cube unité $[0, 1]^3$ et $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} ye^{x^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec N qui pointe à l'extérieur de S .

Exercice 22. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine, $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ une courbe dans le plan et $F: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs. Le flux de F au travers γ est donné par

$$\int_{\gamma} F \bullet d\vec{n} := \int_{\gamma} F \bullet \vec{n} ds,$$

où \vec{n} est un vecteur normal unitaire à droite de la tangente. (Autrement dit, si l'index de la main gauche point dans la direction de la tangente, alors la normale \vec{n} doit pointer dans la direction du pouce.)

a) Montrer que si γ est régulière, alors $\vec{n} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix}$, où γ_1 et γ_2 sont les composantes de γ . Ceci motive la notation suivante.

Notation. On écrit $d\vec{n} = \vec{n} ds = \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}$. De plus, si $F(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$, où $P, Q: D \rightarrow \mathbb{R}$ sont les composantes de F , alors on écrit

$$\int_{\gamma} F \bullet \vec{n} ds = \int_{\gamma} F \bullet d\vec{n} = \int_{\gamma} F \bullet \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} = \int_{\gamma} (P(x, y) dy - Q(x, y) dx),$$

où $dx = \gamma_1'(t) dt$ et $dy = \gamma_2'(t) dt$.

b) Calculer l'intégrale de flux $\int_{\gamma} F \bullet d\vec{n}$, où

i) γ est le cercle $x^2 + y^2 = 1$, dans le sens positif, et $F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;

ii) γ est l'ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, dans le sens positif, et $F(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$;

iii) γ est le triangle dont les sommets sont $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$, dans le sens positif, et $F(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 23. Soit le champ de vecteur

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Soit S_r la sphère de rayon r centrée à l'origine. Montrer que $\int_{S_r} F \bullet d\vec{S}$ ne dépend pas de r . Autrement dit, pour tout $r_1 \neq r_2$ positifs, montrer que

$$\int_{S_{r_1}} F \bullet d\vec{S} = \int_{S_{r_2}} F \bullet d\vec{S}.$$

Remarque. On reconnaît ici le champ de force d'une particule électrique ponctuelle placée à l'origine. Dans un contexte physique, la valeur de cette intégrale dépend de la charge électrique contenue dans la surface fermée sur laquelle on calcule le flux, mais de la surface elle-même. On expliquera cela mathématiquement plus tard dans le cours à l'aide du théorème de Stokes.