Calcul 2

Courbes

1. Limites et dérivées

Exercice 1. Pour chaque courbe suivante, déterminer le domaine maximal dans $\mathbb{R}$ sur lequel elle peut être définie.

a) $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $\qquad$ $f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-t}} \\ \log(t+1) \end{pmatrix}$ $\qquad$ $f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+t^2} \\ \tan t \end{pmatrix}$

Solution.

a) $\mathbb{R}$ $\qquad$ b) $(-1, \infty) \setminus \{1\}$ $\qquad$ c) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{t \to 0^+} \begin{pmatrix} \sin t \\ t+1 \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $\lim_{t \to 1^+} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t}-1} \\ \frac{\log t}{1-t} \end{pmatrix}$ $\qquad$ c) $\lim_{t \to \infty} \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{t} \\ \frac{t^2+1}{2t^2-1} \end{pmatrix}$

Solution. c) On d'abord

$$0 \leq \left| \frac{\sin t}{t} \right| \leq \frac{1}{t}$$

et comme $\frac{1}{t} \to 0$ lorsque $t \to \infty$, il suit que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sin t}{t} = 0.$$

On a ensuite

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t^2+1}{2t^2-1} = \lim_{t \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{2 - \frac{1}{t^2}} = \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2}.$$

Comme les deux limites convergent, on obtient

$$\lim_{t \to \infty} \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{t} \\ \frac{t^2+1}{2t^2-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Calculer les vecteurs tangents des courbes suivantes. Pour chaque courbe, dire si elle est régulière et tracer sa trajectoire.

a) $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $f(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(-t) \\ 3\sin(-t) \end{pmatrix}$

c) $f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$

d) $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$, $t \in [-1, 1]$

Solution. a) On a

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme la troisième composante est non nulle pour tout t, il suit que $f'(t) \neq \vec{0}$. De plus, la dérivée de f existe pour tout t. On peut donc conclure que f est régulière sur $\mathbb{R}$.

Le dessin de la courbe est une spirale qui tourne autour de l'axe des z.

b) On a

$$f'(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(-t) \\ -3\cos(-t) \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on voit que

$$\|f'(t)\|^2 = 4\sin^2(-t) + 9\cos^2(-t) = 4 + \cos^2(-t).$$

Cette quantité est non nulle, puisque $0 \leq \cos^2(-t) \leq 1$. Si $\|f'(t)\|$ est non nulle, il suit que $f'(t)$ est également non nulle. (En effet, on a $\|f'(t)\| = 0 \iff f'(t) = \vec{0}$.) De plus, $f'(t)$ existe pour tout t, donc c'est une courbe régulière.

La trajectoire de f est une ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ si $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 4. Pour chaque courbe suivante, donner l'équation de la droite tangente à la courbe au point indiqué.

a) $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t = \frac{\pi}{4}$

b) $f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad t = 0$

c) $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad t = \frac{\pi}{2}$

d) $f(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad t = \frac{\pi}{6}$

Solution. b) On a $f'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc $f'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. De plus, on voit que $f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc la droite tangente est

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix},$$

où $s \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit la courbe $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de la forme

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Soit $t_0 \in [a,b]$. On suppose que f est régulière en t_0. Donner l'équation de la droite tangente à f passant par $f(t_0)$.

Solution. Le vecteur directeur de la droite est $f'(t_0)$ et la droite passe par le point $f(t_0)$, donc l'équation est

$$\alpha(s) = f(t_0) + sf'(t_0).$$

2. Intégrale de courbe

Exercice 6. *Centre de masse.* Pour les courbes suivantes, vérifier* que $\|f'(t)\| = 1$ pour tout t. Ensuite, calculer le centre de masse des courbes en supposant qu'elles ont une densité de masse uniforme de 1 en utilisant la formule

$$\text{Centre de masse} = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Tracer la courbe et dessiner le centre de masse.

a) L'arc de cercle $f(t) = \begin{pmatrix} 3\cos\left(\frac{t}{3}\right) \\ 3\sin\left(\frac{t}{3}\right) \end{pmatrix}$, où $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Le segment de droite $f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix}$, où $t \in [-1, 2]$.

c) La courbe

$$f(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} t^2 \\ t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t \end{pmatrix},$$

où $t \in [0,1]$. (Utilisez un logiciel pour tracer la courbe au besoin.)

Exercice 7. *Théorème fondamental du calcul (version vectoriel).* Démontrer les deux parties de l'énoncé du théorème fondamentale du calcul, à savoir :

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe continue.

a) On pose $F(t) = \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$. Alors F est dérivable sur $[a,b]$ et $F'(t) = f(t)$.

b) Si F est une primitive de f (c'est-à-dire que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$), alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$.

Solution. a) On a

$$\int_a^t f(x)\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \int_a^t f_1(x)\mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_a^t f_n(x)\mathrm{d}x \end{pmatrix}.$$

* Il y a une formule générale pour le centre de masse qui ne nécessite pas cette hypothèse. Elle sera peut-être discuter plus tard.

Ainsi, en appliquant le théorème fondamental du calcul classic à chaque composante, on obtient

$$F'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t f_1(x)\mathrm{d}x \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t f_n(x)\mathrm{d}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Le b) se fait de façon similaire.

Exercice 8. Soit $f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}^2$ la courbe

$$f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}.$$

a) Tracer f.

b) Calculer $F(t) = \int_{-1}^t f(x)\mathrm{d}x$. Tracer F dans le même plan cartésien.

c) Tracer le segment de droite entre $F(a)$ et $F(b)$.

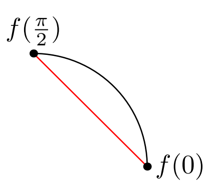
d) Indiquer ce que représente $\| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\|$ sur le dessin.

3. Longueur d'arc

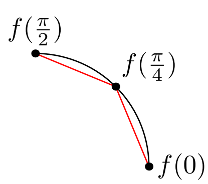
Exercice 9. *Partitions.* Soit la courbe

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

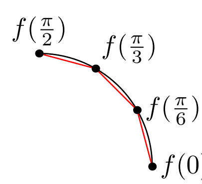
Le but de la question est d'illustrer la définition d'une courbe rectifiable. Pour les partitions suivantes, calculer $\ell(P)$.

a) 

$$P = \left\{0 \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

b) 

$$P = \left\{0 \le \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

c) 

$$P = \left\{0 \le \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

Ensuite, calculer la longueur d'arc $L(f)$ et calculer $|L(f) - \ell(P)|$ pour chaque P du a), b), c). Que remarquez-vous ?

Exercice 10. Calculer la longueur des courbes suivantes.

a) $f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad t \in [0,1]$

b) $f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [-1,1]$

c) $f(t) = \begin{pmatrix} t^{3/2} \\ 2t \end{pmatrix} \quad t \in [0,1]$

d) $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix} \quad t \in [0,1]$

e) $g(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$

Solution. a) On a

$$f'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\|f'\|^2 = 4t^2 + 9t^4 = t^2(4 + 9t^2).$$

Il suit que

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_0^1 \|f'(t)\| \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t\sqrt{4 + 9t^2}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_4^1 3\sqrt{u}\frac{\mathrm{d}u}{18} && (u = 4 + 9t^2,\ \mathrm{d}u = 18t\mathrm{d}t) \\ &= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_4^{13} \\ &= \frac{2}{3}(13^{\frac{3}{2}} + 8). \end{aligned}$$

b) On a d'abord

$$f'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \|f'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4t^2}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \sec\theta(\sec^2\theta \mathrm{d}\theta) \\ & \qquad\qquad (2t = \tan\theta,\ 2\mathrm{d}t = \sec^2\theta\mathrm{d}\theta,\ a = \arctan(-2),\ b = \arctan(2)) \\ &= \int_a^b \sec^3\theta \mathrm{d}\theta \\ &= \left[\frac{\sec\theta\tan\theta}{2} + \frac{1}{2}\log|\sec\theta + \tan\theta|\right]_a^b \\ &= \frac{2\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\log(\sqrt{5} + 2) - \frac{1}{2}\log|\sqrt{5} - 2|. \end{aligned}$$

(On peut trouver $\sec(\arctan(\pm 2)) = \sqrt{5}$ par des identités trigo.)

d) En premier lieu, on a

$$f'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \|f'(t)\| = \sqrt{1+e^{2t}}.$$

En second lieu, on a

$$\begin{aligned}
L(f) &= \int_0^1 \sqrt{1+e^{2t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{u^2}{u^2-1}\mathrm{d}u \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad {\scriptstyle (u=\sqrt{1+e^{2t}},\ \mathrm{d}u = \frac{e^{2t}}{\sqrt{1+e^{2t}}}\mathrm{d}t = \frac{(u^2-1)}{u}\mathrm{d}u)} \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \left(1 + \frac{1}{u^2-1}\right)\mathrm{d}u \\
&= u\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} + \frac{1}{2}\Big[\log|u-1| - \log|u+1|\Big]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \\
&= \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\Big(\log(\sqrt{1+e^2}-1) - \log(\sqrt{2}-1) \\
&\qquad\qquad - \log(\sqrt{1+e^2}+1) + \log(\sqrt{2}+1)\Big).
\end{aligned}$$

Exercice 11. Montrer les propriétés suivantes de la longueur d'arc. Référez-vous à l'exemple 2.2.13 des notes en cas de besoin.

a) Si D est une dilatation d'un facteur $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $L(D \circ f) = \lambda L(f)$. Ici, D est définie par $D\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

b) Si T est une translation par un vecteur $\vec{v}$, alors $L(T \circ f) = L(f)$. Ici, T est défini par $T\vec{x} = \vec{x} + \vec{v}$. (Attention! La dérivée de T n'est pas T elle-même, car T n'est pas linéaire. Montrez d'abord que la dérivée de T est la matrice identité.)

c) Si R est une reflexion selon l'axe des x, alors $L(R \circ f) = L(f)$. Ici, R est défini par $R\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.

Exercice 12. *Équation polaire.* Les coordonnées polaires sont

$$(*) \quad \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Une équation polaire polaire est une relation entre r et θ qui détermine la courbe. Lorsque l'on donne une équation polaire, il est implicitement dit que l'on remplace r ou θ dans $(*)$ pour obtenir la courbe. Par exemple, $r = 1$ est l'équation polaire du cercle de rayon 1.

Pour chaque équation polaire :

$i)$ dire si elle est fermée;

$ii)$ calculer le vecteur tangent;

$iii)$ trouver les points irréguliers.

a) $r = 2$ b) $\theta = \frac{\pi}{4}$ c) $r = \theta$, pour $\theta \in [0, 2\pi]$

d) $r = \cos\theta$, pour $\theta \in [0, 2\pi]$ e) $r = 1 + \cos\theta$

Solution. b) On a la courbe

$$f(r) = \begin{pmatrix} r\cos\frac{\pi}{4} \\ r\sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}.$$

Le vecteur tangent est simplement

$$f'(r) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la courbe est régulière. En fait, c'est une droite qui fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe des x positif.

Elle n'est pas fermée, puisque $r \in [0, \infty)$.

d) La courbe est

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \cos t \sin t \end{pmatrix}.$$

Le vecteur tangent est

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -2\cos t \sin t \\ \cos^2 t - \sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on a

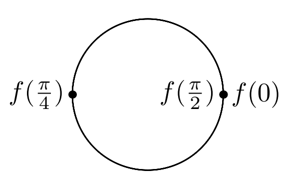
$$\begin{aligned} \|f'(t)\|^2 &= 4\sin^2 t\cos^2 t + \cos^4 - 2\cos^2 t\sin^2 t + \sin^4 t \\ &= \cos^4 + 2\cos^2 t\sin^2 t + \sin^4 t \\ &= (\cos^2 t + \sin^2 t)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\|f'(t)\| \neq 0$, il suit que $f'(t) \neq \vec{0}$, donc la courbe est régulière.

Enfin, on a

$$f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(2\pi),$$

donc la courbe est fermée.



Exercice 13. a) On considère la courbe polaire $r = r(\theta)$, où $\theta \in [a, b]$. Montrer que la longueur de la courbe polaire est donnée par

$$\int_a^b \sqrt{\big(r'(\theta)\big)^2 + \big(r(\theta)\big)^2} \mathrm{d}\theta$$

lorsque r est de classe C^1.

b) On considère maintenant la courbe polaire $\theta = \theta(r)$, où $r \in [0, \infty)$. Montrer que la longueur de la courbe polaire est donnée par

$$\int_0^\infty \sqrt{1 + r^2\big(\theta'(r)\big)^2}\, \mathrm{d}r$$

lorsque l'intégrale impropre converge.

Exercice 14. En utilisant les formules du numéro 13, calculer la longueur des courbes polaires suivantes.

a) $r(\theta) = 1$, où $\theta \in [0, 2\pi]$ b) $r(\theta) = \theta$, où $\theta \in [0, 4\pi]$ c) $r(\theta) = e^{-\theta}$, où $\theta \in [0, \infty)$

Solution. c) On a $r'(\theta) = -e^{-\theta}$, donc

$$\begin{aligned} \int \sqrt{r^2 + (r')^2} \mathrm{d}\theta &= \int \sqrt{e^{-2\theta} + e^{-2\theta}} \mathrm{d}\theta \\ &= \sqrt{2} \int e^{-\theta} \mathrm{d}\theta \\ &= -\sqrt{2} e^{-\theta} + C. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\lim_{M\to\infty} \int_0^M \sqrt{e^{-2\theta} + e^{-2\theta}} \mathrm{d}\theta = -\sqrt{2} \lim_{M\to\infty} e^{-\theta}\Big|_0^M = \sqrt{2}.$$

Puisque l'intégrale impropre converge, elle donne la longueur de la courbe.

Exercice 15. En utilisant les formules du numéro 13, calculer la longueur des courbes polaires du numéro 12.

Exercice 16. Soit $y = f(x)$, où $f \colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ est de classe C^1.

a) Montrer que si f est une fonction paire (c-à-d. $f(-x) = f(x)$), alors la longueur du graphe de f est

$$2 \int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x.$$

b) Montrer que si f est impaire ($f(-x) = -f(x)$), alors on a la même formule qu'au a).

Exercice 17. Soit $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que le segment de droite entre X et Y est la courbe la plus courte parmi toutes les courbes de classe C^1 qui partent de X et qui terminent à Y.

Solution. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe de classe C^1 telle que $f(a) = X$ et $f(b) = Y$. Par l'inégalité triangulaire et le théorème fondamental du calcul, on a

$$\|X - Y\| = \|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|f'(t)\|\mathrm{d}t = L(f).$$

Le côté gauche est la longueur du segment de droite joignant X à Y et le côté droite est la longueur de f.

4. Paramétrage et paramétrage équivalent

Exercice 18. Trouver un paramétrage des trajectoires suivantes et faire un dessin (sauf pour le e).

a) Le cercle de rayon 4 centré en $(0,0)$.

b) Le cercle de rayon 1 centré en $(1,-1)$.

c) La droite passant par les points $(1,0,0)^T$ et $(0,1,0)^T$.

d) La droite passant par $(2,1,0)^T$ et dont le vecteur directeur est $\vec{d} = (1,1,1)^T$.

e) L'image du cercle de rayon 1 centré en $(0,0)$ par la fonction $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - xy^3 - 2xy^2 \\ -y^3 + 2x^2y + x^2y \end{pmatrix}$.

Solution. b) L'équation de ce cercle est $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$. Comme la courbe

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in [0, 2\pi],$$

paramétrise un cercle centré en $(0,0)$ de rayon 1, il suffit de faire une translation de $(1,-1)$. On a donc

$$\alpha(\theta) = \gamma(\theta) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta + 1 \\ \sin\theta - 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que ceci est bon en remplaçant $x = \cos\theta + 1$ et $y = \sin\theta - 1$ dans l'équation de ce cercle.

c) Un vecteur directeur pour la droite est

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, un paramétrage sera

$$\gamma(t) = \vec{d}t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(Il y a plusieurs réponses possibles.)

Exercice 19. *Équations algébriques*. Paramétrer les courbes déterminées par les équations algébriques suivantes.

a) $3x + 2y = 8$ b) $x^3 + y^2 = 2$ c) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

d) $xy = 1, \qquad \text{pour } x > 0$ e) $x^2 - 2x + y^2 + 4y = -4$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 + z = 4, \end{cases} \quad z > 0$ g) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ x + y + 2z = 1, \end{cases} \quad z \geq 0$ i) $\begin{cases} z = xy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Solution. a) On isole y et on obtient $\varphi(x) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{8-3x}{2} \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) On isole x, car la racine cubique est bien définie même pour les nombres négatifs. On obtient $\varphi(y) = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{2 - y^2} \\ y \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$.

c) On adapte les coordonnées polaires : $\varphi(\theta) = \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 3\sin\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

d) On isole y et on obtient $\varphi(x) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$, $x \in (0, \infty)$.

e) On doit compléter les deux carrés. On a

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= (x^2 - 2x + 1) - 1 \\ &= (x-1)^2 - 1, \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} y^2 + 4y &= (y^2 + 4y + 4) - 4 \\ &= (y+2)^2 - 4. \end{aligned}$$

En remplaçant de l'équation de départ, on voit que

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = -4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1.$$

C'est donc un cercle centré en $(1, -2)$ de rayon 1. On a $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t + 1 \\ \sin t - 2 \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi)$.

f) La première équation suggère d'utiliser les coordonnées polaires en (x, y). On pose $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. On remplace dans la deuxième équation :

$$x^2 + y^2 + z = 4 \quad \Rightarrow \quad 1 + z = 4 \quad \Rightarrow \quad z = 3.$$

La courbe est paramétrée par $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi)$.

h) De la deuxième équation, on a $2z = 1 - x - y$. On multiplie la première équation par 4 et on substitue la première :

$$\begin{aligned} 4z^2 = 4x^2 + 4y^2 \quad &\Leftrightarrow \quad (1-x-y)^2 = 4x^2 + 4y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + 2xy - 2x + y^2 - 2y + 1 = 4x^2 + 4y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 = 3x^2 + 2x + 3y^3 + 2y - 2xy \qquad (*) \end{aligned}$$

On cherche maintenant des coefficients a, b, c tels que $(ax + by + c)^2 = 3x^2 + 2x - 2xy + \cdots$. On trouve $a = \sqrt{3}$, $b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$. En reportant dans $(*)$, on a

$$1 = \left(\sqrt{3}x - \tfrac{1}{\sqrt{3}}y + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \tfrac{1}{3}y^2 + \tfrac{2}{3}y - \tfrac{1}{3} + 3y^2 + 2y.$$

On complète le carré des termes en y restant pour obtenir

$$\tfrac{4}{3} = \left(\sqrt{3}x - \tfrac{1}{\sqrt{3}}y + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \tfrac{8}{3}\left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \left(\sqrt{3}x - \tfrac{1}{\sqrt{3}}y + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \tfrac{8}{3}\left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2,$$

Avec le changement de variable $u = \sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $v = y + \frac{1}{2}$, on arrive à l'équation

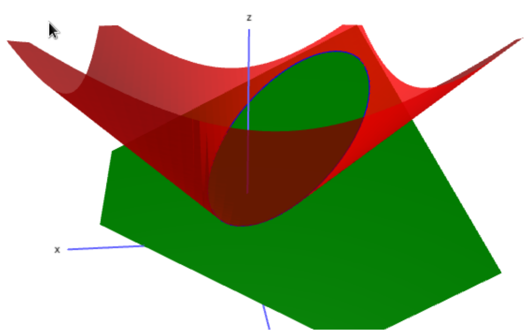
$$2 = u^2 + \frac{8}{3}v^2.$$

C'est une ellipse que l'on paramétrise par

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t \end{pmatrix}.$$

Il suffit d'exprimer (x, y) en terme de (u, v). On trouve enfin

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\cos t + \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{2}\right) \\ \sin t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi).$$



Exercice 20. Paramétrer la frontière des domaines du plan ou des surfaces de l'espace suivants.
a) La frontière du disque $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

b) La frontière du demi-plan $P = \{(x, y) \,|\, 2x - y \leq 0\}$.
c) La frontière du paraboloïde $x^2 + z^2 = y$, avec $y \in [0, 1]$.
d) La frontière de la partie du plan $x - 2y + 3z = 2$, avec $x \geq 0$.

Solution. b) La frontière d'un demi-plan dans $\mathbb{R}^2$ est une droite. Ici, il s'agit de la droite $y = 2x$. On peut la paramétrer comme le graphe d'une fonction, à savoir

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}.$$

c) On obtient la frontière lorsque $y = 1$, ainsi c'est la courbe d'équation $x^2 + z^2 = 1$, $y = 1$, qui correspond à un cercle de rayon 1 contenu dans le plan $y = 1$. On pose donc

$$\varphi(y) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Exercice 21. Calculer la longueur des courbes suivantes.

a) la parabole entre $(-1, -2)$ et $(1, 2)$ et passant par $(0, -1)$

b) l'arc du cercle $x^2 + y^2 = 1$ contenu dans le disque $\{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$

c) la courbe d'intersection du plan $x = \frac{1}{2}$ et de la sphère unité centré à l'origine

d) la courbe d'intersection du cylinde $x^2 + y^2 = 1$ et la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, avec $z > 0$

Solution. a) Une parabole a l'équation générale $y = ax^2 + bx + c$. Puisqu'on connaît trois de ses coordonnées, on obtient les équations

$$\begin{cases} -2 = a - b + c, \\ 2 = a + b + c, \\ -1 = c. \end{cases}$$

On trouve la solution $a = 1$, $b = 2$ et $c = -1$. On peut paramétrer le graphe par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 + 2t - 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t + 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \|\gamma'(t)\|^2 = 1 + 4t^2 + 8t + 4 = 4t^2 + 8t + 5.$$

Commençons par compléter le carré. On a $4t^2 + 8t + 5 = 4(t+1)^2 + 1$.

Ensuite, on a

$$L(\gamma) = \int_{-1}^{1} \sqrt{4(t+1)^2 + 1} \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^b \sec\theta\left(\tfrac{1}{2}\sec^2\theta \mathrm{d}\theta\right)$$

$(\tan\theta = (2t+1),\ \sec^2\theta\mathrm{d}\theta = 2\mathrm{d}t,\ b = \arctan(4))$

$$= \frac{1}{2}\int_0^b \sec^3\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sec\theta\tan\theta}{2} + \frac{1}{2}\log|\sec\theta + \tan\theta|\right]_0^b$$

$$= \frac{1}{4}\left(4\sqrt{17} + \log|\sqrt{17}+4|\right).$$

(On peut trouver $\sec(\arctan(4)) = \sqrt{17}$ par des identités trigo.)

Exercice 22. Montrer que la courbe paramétrée par

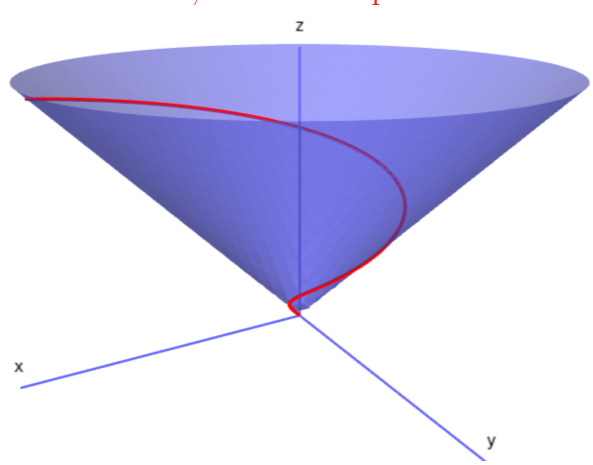
$$\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \\ z = t, \end{cases}$$

se trouve sur le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$. Utiliser cette information pour tracer la trajectoire.

Solution. On substitue dans l'équation :

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = t^2.$$

Comme la dernière équation est vraie, on conclut que la courbe se trouve bien sur le cône.



Exercice 23. Montrer que la courbe

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \\ z = \sin^2 t, \end{cases}$$

est la courbe d'intersection des surfaces $z = x^2$ et $x^2 + y^2 = 1$.

Exercice 24. *Deltoïde.* Soit la courbe paramétrée par

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos(2t) \\ 2\sin t - \sin(2t) \end{pmatrix},$$

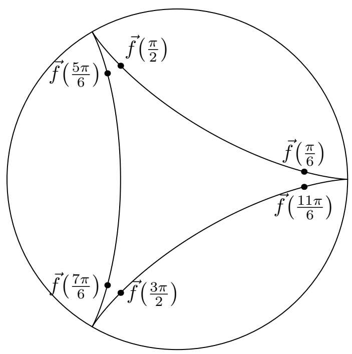
pour $t \in [0, 2\pi]$.

a) Tracer un cercle de rayon 3. Évaluer $\vec{f}$ en $t = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ et en $t = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ et tracer ces points. Tenter de tracer le reste de la courbe.

b) Montrer que c'est une courbe fermée.

c) La courbe présente-t-elle des points de rebroussement ? Des coins ? Combien y en a-t-il de chacun, s'il y en a, et où se trouvent-ils dans le plan cartésien ? La courbe est-elle régulière ?

Solution. a)



b) Il suffit de montrer que $f(0) = f(2\pi)$.

c) On a

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t - 2\sin(2t) \\ 2\cos t - 2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \|f'(t)\|^2 &= 4\sin^2 t + 8\sin t \sin(2t) + 4\sin^2(2t) + 4\cos^2 t - 8\cos t\cos(2t) + 4\cos^2(2t) \\ &= 8 - 8\cos(t + 2t) \qquad \text{(car } \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b\text{)} \\ &= 8 - 8\cos(3t). \end{aligned}$$

On a $8 - 8\cos(3t) = 0$ si et seulement si $\cos(3t) = 1$, donc si et seulement si $3t = 2n\pi$, où $n \in \mathbb{N}$. Il suit que $t = \frac{2n\pi}{3}$. Dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, il y 0, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$. Ainsi, la courbe n'est pas régulière aux points

$$f(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \qquad f\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Ce sont des points de rebroussement. En effet, calculons la limite à droite et à gauche de la direction de la tangente. D'abord, on a

$$\|f'(t)\| = 2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(3t)} = 2\sqrt{2}\left|\sin\left(\tfrac{3t}{2}\right)\right|.$$

On a donc

$$\lim_{t\to\frac{2\pi}{3}^+}\frac{1}{\|f'(t)\|}f'(t)=\lim_{t\to\frac{2\pi}{3}^+}\begin{pmatrix}\frac{-2\sin t-2\sin(2t)}{-2\sqrt{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)}\\ \frac{2\cos t-2\cos(2t)}{-2\sqrt{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)}\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{R.H.}}{=}\lim_{t\to\frac{2\pi}{3}^+}\begin{pmatrix}\frac{\cos t+2\cos(2t)}{\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)}\\ \frac{\sin t-2\sin(2t)}{\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)}\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)$$

Si on calcule la limite à gauche, on trouve $\frac{\sqrt{2}}{3}f\left(\frac{2\pi}{2}\right)$. Les limites pointes dans les sens opposées, c'est pourquoi on trouve un point rebroussement. La démarche est la même pour les deux autres points.

Exercice 25. Associer l'équation polaire à la bonne trajectoire.

a) $r=2$

b) $\theta=\frac{\pi}{4}$

c) $r=\theta$

d) $r=1+\cos\theta$

i) demi-droite
ii) droite
iii) cercle de rayon 1
iv) cercle de rayon 2
v) ellipse
vi) spirale
vii) cardioïde
viii) deltoïde

Solution. a) *iv*) b) *i*) c) *vi*) d) *vii*)

Exercice 26. a) Trouver deux paramétrages équivalents du cercle de rayon 1 centré à l'origine.

b) Trouver deux paramétrages du cercle de rayon 1 équivalent, mais ayant une orientation différente.

Solution. a) On peut prendre

$$\alpha(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix},\quad t\in[0,2\pi),\qquad \text{et}\qquad \gamma(s)=\begin{pmatrix}\cos(2s)\\ \sin(2s)\end{pmatrix},\quad s\in[0,\pi).$$

L'équivalence est donnée par $t=2s$.

b) Il suffit de prendre le α du a) et $\beta(t)=\alpha(-t)$.

Exercice 27. Soit le cylindre $C : x^2 + y^2 = 1$ et le plan $P : ax + by + cz = 0$.

a) Montrer que la courbe d'intersection entre C et P est une ellipse, lorsque $a = 0$ et $b \neq 0$.

b) Montrer que la courbe d'intersection entre C et P est une ellipse lorsque $ab \neq 0$.
Indice. Ramenez-vous au cas du a), plutôt que de refaire les calculs.

c) Quelle est la courbe d'intersection entre C et P lorsque $a = 0$, $b = 0$ et $c \neq 0$?

Exercice 28. *Astroïde.* On regarde la trajectoire d'un point identifié sur un petit cercle qui roule dans un plus grand cercle.

a) Soit un cercle de rayon 4 centré à l'origine. Soit Γ un cercle de rayon 1 tangent au premier cercle en $(4, 0)$ à l'intérieur de celui-ci et C son centre (voir figure 1). On identifie le point $P = (4, 0)$ sur Γ. On laisse Γ rouler à l'intérieur du grand cercle et on suit la trajectoire de P (voir figures 2). Paramétrer cette trajectoire (voir figure 3) en fonction de θ, l'angle que forme le centre de Γ avec l'axe des x positif (voir figures 2).

Indice. Commencez par paramétrer le centre du cercle C en fonction de θ. Ensuite, déterminez quelle distance P a parcouru lorsque C fait un angle θ. À partir de là, référez-vous à l'exemple 2.2.2 des notes de cours.

b) En se fiant à la figure 3, dire si l'atroïde est une courbe de Jordan. (On ne demande pas, ici, une preuve formelle.)

c) Calculer le vecteur tangent de cette astroïde. Est-ce une courbe régulière ?

d) Montrer que cette astroïde a exactement quatre points irrégulier. Où se situent ces points dans le plan cartésien ?

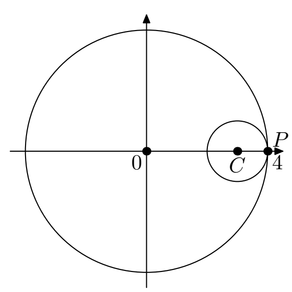
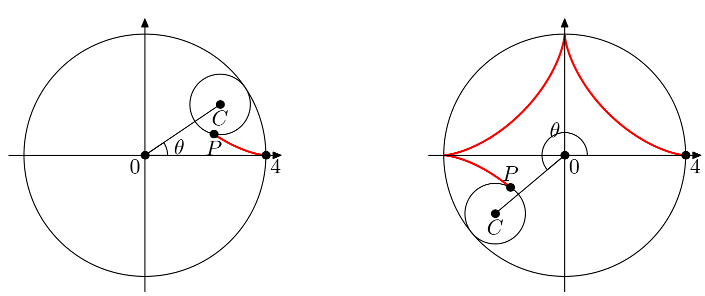


Figure 1



Figures 2

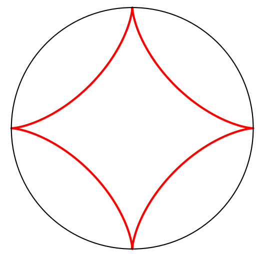


Figure 3