Calcul 2

Courbes

1. Limites et dérivées

Exercice 1. Pour chaque courbe suivante, déterminer le domaine maximal dans $\mathbb{R}$ sur lequel elle peut être définie.

a) $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $\qquad$ $f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-t}} \\ \log(t+1) \end{pmatrix}$ $\qquad$ $f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+t^2} \\ \tan t \end{pmatrix}$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{t\to 0^+} \begin{pmatrix} \sin t \\ t+1 \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{t\to 1^+} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t-1}} \\ \frac{\log t}{1-t} \end{pmatrix}$ $\qquad$ c) $\lim\limits_{t\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{t} \\ \frac{t^2+1}{2t^2-1} \end{pmatrix}$

Exercice 3. Calculer les vecteurs tangents des courbes suivantes. Pour chaque courbe, dire si elle est régulière et tracer sa trajectoire.

a) $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $f(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(-t) \\ 3\sin(-t) \end{pmatrix}$

c) $f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$ $\qquad$ d) $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$, $t \in [-1, 1]$

Exercice 4. Pour chaque courbe suivante, donner l'équation de la droite tangente à la courbe au point indiqué.

a) $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t = \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ b) $f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad t = 0$

c) $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad t = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ d) $f(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad t = \frac{\pi}{6}$

Exercice 5. Soit la courbe $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de la forme

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Soit $t_0 \in [a, b]$. On suppose que f est régulière en t_0. Donner l'équation de la droite tangente à f passant par $f(t_0)$.

2. Intégrale de courbe

Exercice 6. *Centre de masse.* Pour les courbes suivantes, vérifier* que $\|f'(t)\| = 1$ pour tout t. Ensuite, calculer le centre de masse des courbes en supposant qu'elles ont une densité de masse uniforme de 1 en utilisant la formule

$$\text{Centre de masse} = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Tracer la courbe et dessiner le centre de masse.

a) L'arc de cercle $f(t) = \begin{pmatrix} 3\cos\left(\frac{t}{3}\right) \\ 3\sin\left(\frac{t}{3}\right) \end{pmatrix}$, où $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Le segment de droite $f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix}$, où $t \in [-1, 2]$.

c) La courbe

$$f(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} t^2 \\ t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t \end{pmatrix},$$

où $t \in [0, 1]$. (Utilisez un logiciel pour tracer la courbe au besoin.)

Exercice 7. *Théorème fondamental du calcul (version vectoriel).* Démontrer les deux parties de l'énoncé du théorème fondamentale du calcul, à savoir :

Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe continue.

a) On pose $F(t) = \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$. Alors F est dérivable sur $[a, b]$ et $F'(t) = f(t)$.

b) Si F est une primitive de f (c'est-à-dire que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$), alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$.

Exercice 8. Soit $f\colon [-1, 2] \to \mathbb{R}^2$ la courbe

$$f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}.$$

a) Tracer f.

b) Calculer $F(t) = \int_{-1}^t f(x)\mathrm{d}x$. Tracer F dans le même plan cartésien.

c) Tracer le segment de droite entre $F(a)$ et $F(b)$.

d) Indiquer ce que représente $\| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\|$ sur le dessin.

---

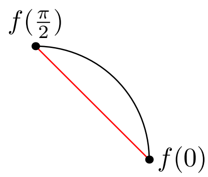
* Il y a une formule générale pour le centre de masse qui ne nécessite pas cette hypothèse. Elle sera peut-être discuter plus tard.

3. Longueur d'arc

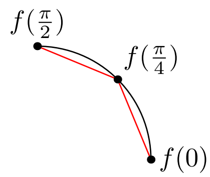
Exercice 9. *Partitions*. Soit la courbe

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

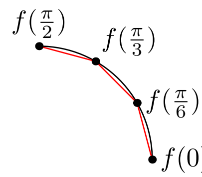
Le but de la question est d'illustrer la définition d'une courbe rectifiable. Pour les partitions suivantes, calculer $\ell(P)$.

a) 

$$P = \left\{0 \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

b) 

$$P = \left\{0 \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

c) 

$$P = \left\{0 \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

Ensuite, calculer la longueur d'arc $L(f)$ et calculer $|L(f) - \ell(P)|$ pour chaque P du a), b), c). Que remarquez-vous?

Exercice 10. Calculer la longueur des courbes suivantes.

a) $f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad t \in [0, 1]$

b) $f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [-1, 1]$

c) $f(t) = \begin{pmatrix} t^{3/2} \\ 2t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 1]$

d) $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 1]$

e) $g(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$

Exercice 11. Montrer les propriétés suivantes de la longueur d'arc. Référez-vous à l'exemple 2.2.13 des notes en cas de besoin.

a) Si D est une dilatation d'un facteur $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $L(D \circ f) = \lambda L(f)$. Ici, D est définie par $D\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

b) Si T est une translation par un vecteur $\vec{v}$, alors $L(T \circ f) = L(f)$. Ici, T est défini par $T\vec{x} = \vec{x} + \vec{v}$. (Attention! La dérivée de T n'est pas T elle-même, car T n'est pas linéaire. Montrez d'abord que la dérivée de T est la matrice identité.)

c) Si R est une reflexion selon l'axe des x, alors $L(R \circ f) = L(f)$. Ici, R est défini par $R\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.

Exercice 12. *Équation polaire*. Les coordonnées polaires sont

$$(*)\quad \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Une équation polaire polaire est une relation entre r et θ qui détermine la courbe. Lorsque l'on donne une équation polaire, il est implicitement dit que l'on remplace r ou θ dans $(*)$ pour obtenir la courbe. Par exemple, $r = 1$ est l'équation polaire du cercle de rayon 1.

Pour chaque équation polaire :

i) dire si elle est fermée;

ii) calculer le vecteur tangent;

iii) trouver les points irréguliers.

a) $r = 2$ b) $\theta = \frac{\pi}{4}$ c) $r = \theta, \quad$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$

d) $r = \cos\theta, \quad$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$ e) $r = 1 + \cos\theta$

Exercice 13. a) On considère la courbe polaire $r = r(\theta)$, où $\theta \in [a, b]$. Montrer que la longueur de la courbe polaire est donnée par

$$\int_a^b \sqrt{\big(r'(\theta)\big)^2 + \big(r(\theta)\big)^2}\mathrm{d}\theta$$

lorsque r est de classe C^1.

b) On considère maintenant la courbe polaire $\theta = \theta(r)$, où $r \in [0, \infty)$. Montrer que la longueur de la courbe polaire est donnée par

$$\int_0^\infty \sqrt{1 + r^2\big(\theta'(r)\big)^2}\,\mathrm{d}r$$

lorsque l'intégrale impropre converge.

Exercice 14. En utilisant les formules du numéro 13, calculer la longueur des courbes polaires suivantes.

a) $r(\theta) = 1$, où $\theta \in [0, 2\pi]$ b) $r(\theta) = \theta$, où $\theta \in [0, 4\pi]$ c) $r(\theta) = e^{-\theta}$, où $\theta \in \big[0, \infty)\big]$

Exercice 15. En utilisant les formules du numéro 13, calculer la longueur des courbes polaires du numéro 12.

Exercice 16. Soit $y = f(x)$, où $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ est de classe C^1.

a) Montrer que si f est une fonction paire (c-à-d. $f(-x) = f(x)$), alors la longueur du graphe de f est
$$2\int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

b) Montrer que si f est impaire ($f(-x) = -f(x)$), alors on a la même formule qu'au a).

Exercice 17. Soit $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que le segment de droite entre X et Y est la courbe la plus courte parmi toutes les courbes de classe C^1 qui partent de X et qui terminent à Y.

4. Paramétrage et paramétrage équivalent

Exercice 18. Trouver un paramétrage des trajectoires suivantes et faire un dessin (sauf pour le e).

a) Le cercle de rayon 4 centré en $(0, 0)$.

b) Le cercle de rayon 1 centré en $(1, -1)$.

c) La droite passant par les points $(1, 0, 0)^T$ et $(0, 1, 0)^T$.

d) La droite passant par $(2, 1, 0)^T$ et dont le vecteur directeur est $\vec{d} = (1, 1, 1)^T$.

e) L'image du cercle de rayon 1 centré en $(0, 0)$ par la fonction $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 - xy^3 - 2xy^2 \\ -y^3 + 2x^2y + x^2y \end{pmatrix}$.

Exercice 19. *Équations algébriques*. Paramétrer les courbes déterminées par les équations algébriques suivantes.

a) $3x + 2y = 8$

b) $x^3 + y^2 = 2$

c) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

d) $xy = 1, \quad$ pour $x > 0$

e) $x^2 - 2x + y^2 + 4y = -4$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 + z = 4, \end{cases} \quad z > 0$

g) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ x + y + 2z = 1, \end{cases} \quad z \geq 0$

i) $\begin{cases} z = xy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Exercice 20. Paramétrer la frontière des domaines du plan ou des surfaces de l'espace suivants.

a) La frontière du disque $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

b) La frontière du demi-plan $P = \{(x, y) \,|\, 2x - y \leq 0\}$.

c) La frontière du paraboloïde $x^2 + z^2 = y$, avec $y \in [0, 1]$.

d) La frontière de la partie du plan $x - 2y + 3z = 2$, avec $x \geq 0$.

Exercice 21. Calculer la longueur des courbes suivantes.

a) la parabole entre $(-1,-2)$ et $(1,2)$ et passant par $(0,-1)$

b) l'arc du cercle $x^2+y^2=1$ contenu dans le disque $\{(x,y) \mid (x-1)^2+y^2 \leq 1\}$

c) la courbe d'intersection du plan $x=\frac{1}{2}$ et de la sphère unité centré à l'origine

d) la courbe d'intersection du cylinde $x^2+y^2=1$ et la sphère $x^2+y^2+z^2=4$, avec $z>0$

Exercice 22. Montrer que la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \\ z = t, \end{cases}$$

se trouve sur le cône d'équation $z^2 = x^2+y^2$. Utiliser cette information pour tracer la trajectoire.

Exercice 23. Montrer que la courbe

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \\ z = \sin^2 t, \end{cases}$$

est la courbe d'intersection des surfaces $z=x^2$ et $x^2+y^2=1$.

Exercice 24. *Deltoïde.* Soit la courbe paramétrée par

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos(2t) \\ 2\sin t - \sin(2t) \end{pmatrix},$$

pour $t \in [0, 2\pi]$.

a) Tracer un cercle de rayon 3. Évaluer $\vec{f}$ en $t = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ et en $t = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ et tracer ces points. Tenter de tracer le reste de la courbe.

b) Montrer que c'est une courbe fermée.

c) La courbe présente-t-elle des points de rebroussement? Des coins? Combien y en a-t-il de chacun, s'il y en a, et où se trouvent-ils dans le plan cartésien? La courbe est-elle régulière?

Exercice 25. Associer l'équation polaire à la bonne trajectoire.

a) $r = 2$	$i)$ demi-droite
b) $\theta = \frac{\pi}{4}$	$ii)$ droite
c) $r = \theta$	$iii)$ cercle de rayon 1
d) $r = 1 + \cos\theta$	$iv)$ cercle de rayon 2
	$v)$ ellipse
	$vi)$ spirale
	$vii)$ cardioïde
	$viii)$ deltoïde

Exercice 26. a) Trouver deux paramétrages équivalents du cercle de rayon 1 centré à l'origine.

b) Trouver deux paramétrages du cercle de rayon 1 équivalent, mais ayant une orientation différente.

Exercice 27. Soit le cylindre $C : x^2 + y^2 = 1$ et le plan $P : ax + by + cz = 0$.

a) Montrer que la courbe d'intersection entre C et P est une ellipse, lorsque $a = 0$ et $b \neq 0$.

b) Montrer que la courbe d'intersection entre C et P est une ellipse lorsque $ab \neq 0$.
Indice. Ramenez-vous au cas du a), plutôt que de refaire les calculs.

c) Quelle est la courbe d'intersection entre C et P lorsque $a = 0$, $b = 0$ et $c \neq 0$?

Exercice 28. *Astroïde.* On regarde la trajectoire d'un point identifié sur un petit cercle qui roule dans un plus grand cercle.

a) Soit un cercle de rayon 4 centré à l'origine. Soit Γ un cercle de rayon 1 tangent au premier cercle en $(4, 0)$ à l'intérieur de celui-ci et C son centre (voir figure 1). On identifie le point $P = (4, 0)$ sur Γ. On laisse Γ rouler à l'intérieur du grand cercle et on suit la trajectoire de P (voir figures 2). Paramétrer cette trajectoire (voir figure 3) en fonction de θ, l'angle que forme le centre de Γ avec l'axe des x positif (voir figures 2).

Indice. Commencez par paramétrer le centre du cercle C en fonction de θ. Ensuite, déterminez quelle distance P a parcouru lorsque C fait un angle θ. À partir de là, référez-vous à l'exemple 2.2.2 des notes de cours.

b) En se fiant à la figure 3, dire si l'atroïde est une courbe de Jordan. (On ne demande pas, ici, une preuve formelle.)

c) Calculer le vecteur tangent de cette astroïde. Est-ce une courbe régulière?

d) Montrer que cette astroïde a exactement quatre points irrégulier. Où se situent ces points dans le plan cartésien?

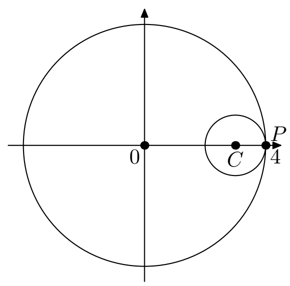
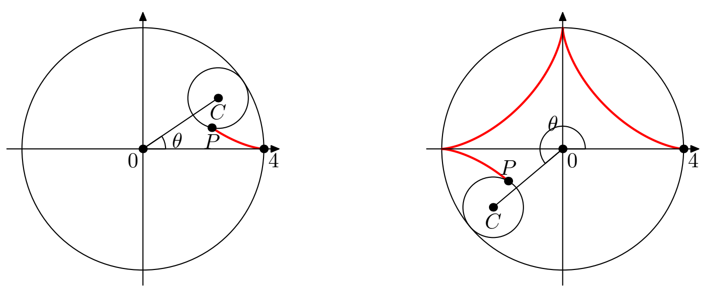


Figure 1



Figures 2

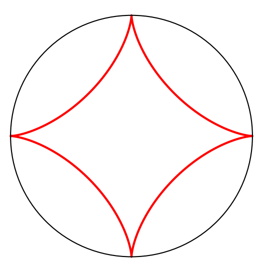


Figure 3