

Calcul 2

Équations différentielles et calcul vectoriel

Note de cours fait par Jonathan Godin*

Table des matières

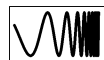
Introduction.....	3
Notations.....	3
Rappels du calcul de fonctions de plusieurs variables.....	3
Première partie. Équations différentielles ordinaires	7
1.1. Définitions et exemples.....	8
1.2. Les équations du premier ordre.....	9
1.2.1 Forme normale.....	9
1.2.2 Techniques de résolution d'EDO d'ordre 1.....	11
1.3. Existence et unicité des solutions.....	19
1.3.1 Problème de Cauchy.....	19
1.3.2 Théorème d'existence et d'unicité au problème de Cauchy.....	20
1.4. Équations linéaires du premier ordre.....	21
1.4.1 Équation homogène.....	22
1.4.2 Équation inhomogène.....	23
1.5. Équations du deuxième ordre.....	27
1.5.1 Réduction à des équations d'ordre 1.....	27
1.5.2 Équations linéaires du deuxième ordre.....	30
1.6. Champs de vecteurs et EDO.....	37
1.6.1 Lien entre les EDO et les champs de vecteurs.....	39
1.6.2 Lignes de champ.....	42
Deuxième partie. Analyse vectorielle	46
2.1. Opérations sur les champs de vecteurs.....	47
2.1.1 Rotationnel et divergence.....	47
2.1.2 Propriétés des opérations.....	50
2.2. Courbes et surfaces dans \mathbb{R}^n	52
2.2.1 Dérivée et vecteur tangent.....	56
2.2.2 Intégrale de courbe.....	61
2.2.3 Longueur d'arc.....	63
2.2.4 Courbes équivalentes.....	71
2.2.5 Surfaces paramétrées dans \mathbb{R}^n	76
2.2.6 Vecteur normal et plan tangent d'une surface.....	77
2.2.7 L'aire des surfaces.....	80
2.2.8 Surfaces équivalentes.....	83
2.3. Intégrale sur les courbes et les surfaces.....	87

* Ces notes sont en grande partie inspirées de mes notes prises en classe au cours d'Équations différentielles et calcul vectoriel donné par Jean-Philippe Lessard à l'Université Laval à l'hiver 2012.

2.3.1	Intégrale d'un champ scalaire.....	87
2.3.2	Propriété des intégrales de champ scalaire.....	93
2.3.3	Centre de masse.....	94
2.3.4	Intégrale curviligne.....	101
2.3.5	Propriétés de l'intégrale curviligne.....	106
2.3.6	Indépendance du chemin et champs conservatifs.....	107
2.3.7	Intégrale de flux.....	111
2.3.8	Propriété de l'intégrale de flux.....	114
2.4.	Analyse vectoriel.....	115
2.4.1	Rappel : les intégrales itérées.....	115
2.4.2	Théorème de Green.....	117
2.4.3	Théorème de Stokes.....	127
2.4.4	Théorème de Gauss (ou de la divergence).....	138

Introduction

Ce document constitue les notes de cours pour le cours de calcul 2 (équations différentielles et calcul vectoriel) à l'Université de Montréal. Dans un premier temps, ce texte traite des premières techniques de résolution des équations différentielles ordinaires (EDO) du premier et deuxième ordre, ainsi que les aspects théoriques comme le Théorème d'existence et d'unicité des solutions (sans la démonstration de ce dernier). Dans un deuxième temps, il traite de l'analyse vectoriel, à savoir le calcul différentiel des fonctions vectorielles, les différents types d'intégrales et les théorèmes fondamentaux : Green-Riemann, Stokes, Gauss (ou flux-divergence).



Idée inspiré du TeXbook, les paragraphes comme celui-ci, précédés d'un sinus du topologue, contiennent des remarques ou des explications qui peuvent être ignorées lors d'une première lecture. Ils sont composés en taille 10pt, donc on peut facilement savoir où se termine le passage. Ces sections seront étiquetées ainsi pour l'une des raisons suivantes : des outils qui ne sont pas supposés maîtrisés pour le cours sont utilisés (p.ex. la continuité uniforme), un raisonnement un peu plus difficile à suivre (c'est ce qui a inspiré le symbole), le contenu s'éloigne un peu trop de la discussion ou du cadre du cours, un exercice qui est plus difficile.

Notations

$y \equiv C$	« Constamment égale », la fonction $y(x)$ vaut C pour tout x .
df_x	La différentielle de f au point x .
∇f	Le gradient de f .
$\vec{v} \bullet \vec{w}$	Le produit scalaire entre \vec{v} et \vec{w} .
$\vec{v} \times \vec{w}$	Le produit vectoriel entre \vec{v} et \vec{w} .
ds	Élément de longueur, $ds = \ \vec{r}'(t)\ dt$.
dA	Élément d'aire, $dA = dx dy$.
dS	Élément de surface, $dS = \ \vec{N}\ dudv$.
EDO	Équation différentielle ordinaire.

Rappels du calcul de fonctions de plusieurs variables

Soit $(x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définitions 1. La fonction f est *continument différentiable* si toutes ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, pour $j = 1, \dots, n$, existent et sont *continues*. On dira que f est de classe C^1 .

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est de classe C^k si $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est de classe C^{k-1} pour tout $j = 1, \dots, n$.
3. La fonction f est de classe C^∞ si f est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Une fonction de classe C^0 est une fonction continue.

Le gradient de f , noté ∇f ou $\text{grad } f$, est défini par

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Plus généralement, la *différentielle* d'une fonction $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 est équivalente à la matrice $m \times n$

$$dg = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est aussi appelée la *matrice jacobienne* de g , notée $\text{Jac } g$. La *jacobienne* de g réfère au déterminant de $\text{Jac } g$ en valeur absolue, notée $|\text{Jac } g|$, c'est-à-dire

$$|\text{Jac } g| := |\det(\text{Jac } g)|.$$

On notera par $\text{Jac}_x g$ au besoin la matrice jacobienne de g au point x , c'est-à-dire $\text{Jac}_x g := (\text{Jac } g)|_x$.

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ et soit $f: V \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $g: U \rightarrow V$ des fonctions dérivables. On rappelle que la *règle de dérivation* en chaîne s'écrit

$$d(f \circ g)(x) = df(g(x))dg(x).$$

Lorsque l'on choisit des bases pour \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^d , les dérivées de f et de g sont représentées par des matrices et la formule s'interprète donc comme le produit matricielle de la matrice $df(g(x))$ (de taille $d \times m$) avec $dg(x)$ (de taille $m \times n$).

Considérons le cas suivant comme exemple. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 . Selon la dérivation en chaîne, on a

$$\frac{\partial}{\partial x} f \circ g(x, y) = \frac{df}{dt}(g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} f \circ g(x, y) = \frac{df}{dt}(g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y).$$

Le gradient de $f \circ g$ est donc

$$\nabla f \circ g = f' \cdot \nabla g.$$

Exemple. *Dérivation en chaîne.* Soit $f: t \mapsto f(t)$ et $g(x, y) = x^2 + y^2$. On veut dériver $f \circ g$. On a $f \circ g(x, y) = f(x^2 + y^2)$. La dérivation en chaîne nous donne

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x^2 + y^2) = f'(x^2 + y^2)2x$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x^2 + y^2) = f'(x^2 + y^2)2y.$$

En particulier, le gradient de $f \circ g$ est $(f'(x^2 + y^2)2x, f'(x^2 + y^2)2y) = \underline{f'(x^2 + y^2)(2x, 2y)}$.

Pendant le cours, on rencontrera deux scénarios importants où il faudra dériver.

Exemple. *Dériver d'une équation implicite.* Soit $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $C \in \mathbb{R}$ une constante. L'équation $\varphi(x, y) = C$ définit implicite une fonction y en fonction de x sur un certain intervalle. Pour calculer y' , on utilise la dérivation en chaîne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\varphi(x, y(x)) = \frac{d}{dx}C &\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y(x))\frac{dx}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y(x))\frac{dy}{dx} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y(x))\frac{dy}{dx} = 0. \end{aligned}$$

Si $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ est non nul, alors on trouve

$$y' = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}.$$

Exemple. *Comprendre la notation.* Soit $\Sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux fonctions de classe C^1 . On pose $T_x = \frac{\partial\Sigma}{\partial x}$ et $T_y = \frac{\partial\Sigma}{\partial y}$. Exprimer $d(F \circ \Sigma)$ en terme des dérivées partielles de F , de T_x et de T_y .

Solution. D'abord, expliquons ce que sont T_x et T_y . On peut écrire

$$\Sigma(x, y) = \begin{pmatrix} \Sigma_1(x, y) \\ \Sigma_2(x, y) \\ \Sigma_3(x, y) \end{pmatrix}.$$

Si on calcule la dérivée de Σ , on trouve

$$d\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Sigma_1}{\partial x} & \frac{\partial\Sigma_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\Sigma_2}{\partial x} & \frac{\partial\Sigma_2}{\partial y} \\ \frac{\partial\Sigma_3}{\partial x} & \frac{\partial\Sigma_3}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Lorsqu'on écrit $\frac{\partial\Sigma}{\partial x}$, on veut dire

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Sigma_1}{\partial x} \\ \frac{\partial\Sigma_2}{\partial x} \\ \frac{\partial\Sigma_3}{\partial x} \end{pmatrix} = T_x$$

et simiairement pour $\frac{\partial\Sigma}{\partial y}$.

On remarque que T_x est la première colonne de $d\Sigma$ et que T_y est la seconde. On peut donc écrire

$$d\Sigma = (T_x \quad T_y).$$

Dérivons maintenant $F \circ \Sigma$. On omettra la composition par Σ pour alléger les équations. Par la dérivation en chaîne, on a

$$\begin{aligned}
d(F \circ \Sigma) &= (dF \circ \Sigma) d\Sigma \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} & \frac{\partial \Sigma_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} & \frac{\partial \Sigma_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \Sigma_3}{\partial x} & \frac{\partial \Sigma_3}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial \Sigma_3}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial \Sigma_3}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial \Sigma_3}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial \Sigma_3}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial y} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial \Sigma_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial y} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial \Sigma_3}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \nabla F_1 \cdot T_x & \nabla F_1 \cdot T_y \\ \nabla F_2 \cdot T_x & \nabla F_2 \cdot T_y \\ \nabla F_3 \cdot T_x & \nabla F_3 \cdot T_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \nabla F_1 \\ \nabla F_2 \\ \nabla F_3 \end{pmatrix} (T_x \quad T_y).
\end{aligned}$$

Toutes ces égalités sont des façons différentes d'exprimer $d(F \circ \Sigma)$. Le but de l'exemple est de se rendre compte que l'on peut passer d'une expression à une autre sans problème, car parfois, une certaine expression sera plus utile qu'une autre, selon le contexte.

Les *courbes de niveau* d'une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont les ensembles

$$\mathcal{C}_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = C\}$$

pour des constantes $C \in \mathbb{R}$. Lorsque f est de classe C^1 , les courbes de niveau forment des courbes régulières dans le plan xy . Le gradient de f est alors perpendiculaire à la courbe de niveau en tout point.

Ceci se généralise à des surfaces de niveau pour les fonctions $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Première partie
Équations différentielles ordinaires

1.1. Définitions et exemples

Commençons par quelques exemples classiques où les équations différentielles sont utilisées.

Exemple 1.1.1. La seconde loi de Newton.

$$mx''(t) = mg - ax'(t),$$

où $x(t)$ est la position d'un corps de masse m et a est une constante.

Exemple 1.1.2. Désintégration radioactive (Modèle de Rutherford).

Soit $M(t)$ la quantité de matière radioactive au temps t . Le taux de désintégration est proportionnel à la quantité de matière :

$$\frac{dM}{dt} = -\lambda M,$$

où λ est une constante de proportionnalité.

Les équations différentielles ordinaires ne font intervenir *qu'une seule variable indépendante*. Lorsqu'elles font intervenir plusieurs variables indépendantes, elles sont appelées *équations aux dérivées partielles*. L'étude de ces dernières dépassent largement le cadre de ce cours.

Définition 1.1.1. Une *équation différentielle ordinaire* (EDO) est une relation entre une variable (indépendante), une fonction (variable dépendante) et un certain nombre de ces dérivées.

Définition 1.1.2. On appelle *ordre d'une EDO* l'ordre de dérivation le plus élevé qu'on y trouve.

Exemple 1.1.3.

- a) $(y'')^3 + (y')^3 = 1$ est une équation du deuxième ordre.
- b) $y' = y + x^3$ est une équation du premier ordre.
- c) $y^{(n)} + y^{(n-1)} + \dots + y' + y + x = 0$ est une équation d'ordre n .

Définition 1.1.3. On appelle *solution d'une EDO* une fonction $y = f(x)$ qui satisfait à la relation de l'EDO.

Exemple 1.1.4.

- a) $y(x) = 3x$ est une solution de $(y'(x))^2 = 9$. Or, $y(x) = e^x$ ne l'est pas.
 b) $y(x) = -3x + 4$ est aussi une solution de $(y'(x))^2 = 9$. De même pour $y(x) = -3x + \alpha$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
 c) L'EDO $(y'(x))^2 + x^2 = -1$ n'a pas de solution réelle.
 d) $y'(x) = -2y(x) : y(x) = e^{-2x}$ est une solution. En effet, on a $y'(x) = -2e^{-2x} = -2y(x)$.

Exemple 1.1.5. Chute d'un corps (formulation simplifiée). Un corps en chute libre sans résistance de l'air se décrit par $x''(t) = g$, donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x'(t)) &= g \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} &= gt + C_1 \\ \Rightarrow x(t) &= g\frac{t^2}{2} + C_1t + C_2 \end{aligned}$$

pour C_1, C_2 des constantes arbitraires. Ceci nous donne la *solution générale*.

Supposons qu'on veuille trouver une solution satisfaisant les conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = C_2 = 1 \\ x'(t) = gt + C_1 \Rightarrow x'(0) = C_1 = 0 \end{cases}$$

La solution particulière est donc $x(t) = g\frac{t^2}{2} + 1$.

À retenir : vérifier si $y = f(x)$ est la solution d'une EDO est facile, mais trouver la solution demande plus de travail !

Lorsque l'on connaît la solution d'une EDO, il est facile de vérifier qu'elle est effectivement la solution. Trouver une solution constitue un problème différent beaucoup plus compliqué. Le reste de cette partie est dédiée aux techniques de résolution de certains types d'EDO.

1.2. Les équations du premier ordre

On rappelle qu'une EDO du premier ordre est une équation qui ne fait intervenir aucune dérivée d'ordre deux ou d'ordre supérieur. Ainsi, on retrouvera la variable indépendante, la variable dépendante et la dérivée première de celle-ci. Le but ultime est de résoudre de telles équations, mais la section couvrira également un peu de théorie.

1.2.1 Forme normale

La forme la plus générale pour écrire une EDO du premier ordre est

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Exemple 1.2.1.

- 1) $F(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 - x_3 + 1$ mène au système $(y(t))^2 - y'(t) + 1 = 0$.
 2) L'EDO

$$\frac{dM}{dt} = -\lambda M$$

s'écrit $y' = -\lambda y$, donc $y' + \lambda y = 0$, ce qui mène à la fonction

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3 + \lambda x_2.$$

Soit $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in \mathbb{R}^3$ un point. Par le théorème des fonctions implicites (voir analyse 3), on a que si $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3}$ existent et sont continues (F est de classe C^1) et si $\frac{\partial F}{\partial x_3}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \neq 0$ et $F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = 0$, alors l'équation $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ est équivalente à $x_3 = g(x_1, x_2)$ pour (x_1, x_2) près de (\bar{x}_1, \bar{x}_2) et pour une certaine fonction g . L'EDO associé prend donc la forme

$$y'(t) = g(t, y(t)). \quad (\text{forme normale})$$

Exemple 1.2.2. $(y'(t))^2 + (y(t))^2 = 9$. Ici, on a la fonction associée $F(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 + x_2^2 - 9$. On voit que $\frac{\partial F}{\partial x_3} = 2x_3 \neq 0$ lorsque $x_3 \neq 0$.

Si $y'(t) \neq 0$, alors l'EDO peut s'écrire soit comme $y'(t) = \sqrt{9 - y(t)^2}$ ou $y'(t) = -\sqrt{9 - y(t)^2}$.

On verra que $y(t) = \pm 3 \sin(t + c)$ est la solution générale. Or $y(t) = \pm 3$ sont aussi des solutions, mais elles ne font pas partie de la famille des solutions données par la solution générale. Cela est dû au fait que le théorème des fonctions implicites fait défaut en $y'(t) = 0$.

Informellement, la *famille de solutions générales* est l'ensemble des solutions que l'on peut trouver à l'aide d'une méthode appropriée, selon le contexte (p.ex. la séparation de variables). Les *solutions singulières* sont les solutions que cette méthode n'a pu trouver, par exemple à cause de restrictions comme supposer que $y(x) \neq 0$.

Exemple 1.2.3. $y' = y$. On sait déjà que les solutions de cette EDO bien connue sont de la forme $y(x) = Ce^x$ pour $C \in \mathbb{R}^*$. L'ensemble de fonctions

$$\mathcal{S} = \{y(x) = Ce^x \mid C \in \mathbb{R}^*\}$$

forme la famille de solutions générales. De plus, la fonction constante $y(x) \equiv 0$ est la solution singulière.

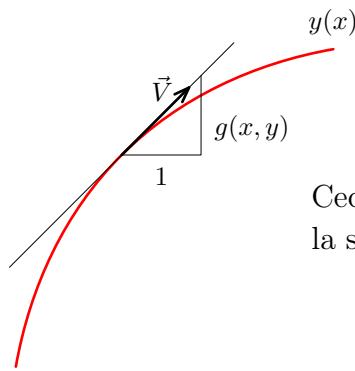
Voici les démarches pour arriver à ces conclusions. On utilise la séparation de variables, donc on a

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx, & (y \neq 0) & (*) \\
&\Leftrightarrow \log |y| = x + k, & (k \in \mathbb{R}) & \\
&\Leftrightarrow |y| = e^k e^x, & (e^k \in \mathbb{R}^+) & \\
&\Leftrightarrow y = \pm e^k e^x \\
&\Leftrightarrow y = C e^x, & \text{où } C \in \mathbb{R}^*. &
\end{aligned}$$

À la dernière ligne, on tombe sur toutes les solutions que cette méthode atteint; ce sont les solutions générales. Or, à la ligne (*), pour obtenir l'implication, on doit supposer que $y \neq 0$. On voit que la fonction nulle $y \equiv 0$ satisfait à l'EDO, ce qui veut dire que la méthode de séparation de variables n'a pas pu la trouver.

Voici l'interprétation géométrique de la forme normale. Supposons que l'EDO $y' = g(x, y)$ soit définie partout dans le plan. On définit le vecteur \vec{V} au point (x, y) par



$$\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+g(x,y)^2}} \\ \frac{g(x,y)}{\sqrt{1+g(x,y)^2}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Ceci donne un vecteur unitaire (de longueur 1) tangent au graphe de la solution de l'EDO. En effet, le vecteur $\vec{V}(x, y)$ a pour pente

$$\left(\frac{g(x, y)}{\sqrt{1 + g(x, y)^2}} \right) / \left(\frac{1}{\sqrt{1 + g(x, y)^2}} \right) = g(x, y) = y'.$$

La fonction \vec{V} est appelée un champ de vecteurs. Même si on ne connaît pas les solutions de $y' = g(x, y)$, on sait tout même la direction de la tangente en tout point.

On définit la notion de champ de vecteurs dans le plan.

Définition 1.2.1. Un *champ de vecteurs du plan* est une application $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Elle sera habituellement notée $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{V}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ou $\vec{v}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. La notation avec une flèche (\vec{V} ou \vec{v}) est utile pour faire ressortir le fait que $\vec{v}(x, y)$ est une *vecteur* plutôt qu'un nombre réel, mais elle n'est jamais obligatoire (pour le cours).

Un champ de vecteurs associe à chaque point (x, y) un vecteur $\vec{v}(x, y)$, donc une direction et une vitesse. On dira que le champ de vecteurs est de classe C^k si v_1 et v_2 sont de classe C^k , où $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \end{pmatrix}$.

On verra qu'il est intéressant de voir si un champ de vecteurs provient d'une EDO ou non.

1.2.2 Techniques de résolution d'EDO d'ordre 1

Cette section présentera des techniques de résolution d'EDO d'ordre 1. À travers la section, il deviendra de plus en plus évident que résoudre une EDO est en général très difficile. Pour voir des méthodes plus sophistiquées, il faudrait suivre un cours d'équations différentielles plus avancé.

Les équations à variables séparables

Les équations les plus « simples » à résoudre sont les suivantes.

Définition 1.2.2. Une équation est dite *séparable* si elle est de la forme $y' = \varphi(x)\psi(y)$. *****

Voici comment on peut établir que ces équations ont une solution.

Théorème 1.2.3. Soit $y' = \varphi(x)\psi(y)$ une EDO séparable. Si φ et $\frac{1}{\psi}$ sont continues, alors la solution est donnée par l'équation implicite

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx + C.$$

Remarque. Caché dans les hypothèses, la supposition $\psi(y) \neq 0$ pour tout y est implicite. Il faut donc vérifier que cela est vraie avant d'utiliser le théorème! *****

Démonstration. Soit y une fonction de x qui vérifie l'équation implicite du théorème. Soit $G(y(x)) = \int \frac{y'(x)dx}{\psi(y(x))}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}G(y(x)) &= \frac{y'(x)}{\psi(y(x))} \\ &= \frac{\psi(y(x))\varphi(x)}{\psi(y(x))} \\ &= \varphi(x). \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x , on obtient

$$G(y(x)) = \int \varphi(x)dx + C.$$

□

L'ensemble des y_0 tel que $\psi(y_0) = 0$ est un ensemble de solutions, car si $\psi(y_0) = 0$, alors la fonction constante $y(x) \equiv y_0$ satisfait bien $y'(x) = \psi(y_0)\varphi(x) = 0$.

Exemple 1.2.4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$.

On a

$$\int y dy = \int x dx,$$

donc $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.2.5. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

On voit ici que $y \equiv 0$, la fonction constante, est une solution. Maintenant supposons que $y \neq 0$ pour trouver les autres solutions. On a

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x} \\ \log |y| &= \log |x| + c \\ |y| &= e^c |x|,\end{aligned}$$

donc on a $y(x) = \pm e^c x = kx$ avec $x \in (-\infty, 0)$ ou $x \in (0, +\infty)$ et $k \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.2.6. $y' = -\frac{y^2}{1+x}$.

On voit que $y \equiv 0$ est une solution. Supposons $y \neq 0$. On a

$$\begin{aligned}-\int \frac{dy}{y^2} &= \int \frac{dx}{1+x} \\ \frac{1}{y} &= \log |1+x| + C \\ y(x) &= \frac{1}{\log |1+x| + C}, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Remarque. Les deux exemples précédents illustrent bien comment se manifestent les solutions singulières. Rappelons qu'une solution est singulière lorsqu'elle ne fait pas partie de la famille de solutions. Ici, les solutions constantes $y \equiv 0$ ne pouvaient s'obtenir de la méthode de séparation de variables.

Exemple 1.2.7. Chute libre (résistance de l'air linéaire). Lorsqu'un corps est en chute libre, on peut faire la supposition que la résistance de l'air est directement proportionnelle à la vitesse. Ceci donne l'EDO $mx''(t) = mg - ax'(t)$.

Posons $v(t) = x'(t)$ (vitesse). On a

$$mv'(t) = mg - av(t),$$

qui est séparable. On obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{m}{mg - av} dv &= \int dt \\ -\frac{m}{a} \log |mg - av| &= t + c\end{aligned}$$

$$\log |mg - av| = -\frac{at}{m} + c$$

$$|mg - av| = e^c e^{-\frac{at}{m}}$$

$$\begin{aligned} mg - av &= \pm e^c e^{-\frac{at}{m}} \\ &= D e^{-\frac{at}{m}}, \quad D = \pm e^c \neq 0. \end{aligned}$$

La solution générale est $v(t) = \frac{mg - D e^{-\frac{at}{m}}}{a}$ avec $D \neq 0$. On remarque que dans le cas où $D = 0$, $v(t) = \frac{mg}{a}$ est la solution singulière constante, donc on a, en fait, $D \in \mathbb{R}$.

Ensuite, on doit résoudre $x'(t) = v(t)$. On a

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{mg - D e^{-\frac{at}{m}}}{a} \\ \Rightarrow x(t) &= \int \frac{mg - D e^{-\frac{at}{m}}}{a} dt \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{mgt + \frac{Dm}{a} e^{-\frac{at}{m}}}{a} + C. \end{aligned}$$

Changement de variable $u = \frac{y}{x}$

Si une EDO $F(x, y, y') = 0$ peut s'écrire sous la forme $y' = f(y/x)$, alors on peut effectuer le changement de variable $u = \frac{y}{x}$. Ainsi, on a $xu = y$ et en dérivant, on obtient

$$y' = f(u) = u + xu'$$

qui est parfois plus simple à résoudre.

Exemple 1.2.8. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x+y}{x-y}$.

Avec $u = \frac{y}{x}$, on obtient

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} + \frac{x+y}{x-y} \\ &= \frac{y}{x} + \frac{x(1 + \frac{y}{x})}{x(1 - \frac{y}{x})} \\ &= u + \frac{x(1+u)}{x(1-u)}. \end{aligned}$$

Puisque $y' = u + xu'$, on a

$$u + xu' = u + \frac{1+u}{1-u},$$

qui est à variable séparable. Ainsi, il s'ensuit que

$$\int \frac{1-u}{1+u} du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\log |1+u| - \int \frac{u}{1+u} du = \log |x| + c$$

$$\log |1+u| - 1 - u + \log |1+u| =$$

$$2 \log \left| 1 + \frac{y}{x} \right| - 1 + \frac{y}{x} = \log |x| + c.$$

Ceci donne la solution sous forme implicite.

Changement de variable $u = ax + by$

Supposons que l'EDO s'écrit $y' = f(ax + by)$. Posons $u(x) = ax + by(x)$:

$$\Rightarrow u' = a + by'$$

$$\Rightarrow u' = a + bf(u).$$

La nouvelle EDO $u' = a + bf(u)$ est parfois plus facile à résoudre.

Exemple 1.2.9. $y' = (x + 4y)^2$.

Posons $u = x + 4y$:

$$y = \frac{u-x}{4}$$

$$y' = \frac{u'-1}{4} = (x+4y)^2 = u^2.$$

On a donc $u' = 1 + 4u^2$, ce qui se résout par séparation de variable comme suit :

$$\Rightarrow \int \frac{du}{1+4u^2} = \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \arctan w = x + c \quad \begin{array}{l} w = 2u \\ dw = 2du \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \arctan(2u) = x + c$$

$$\Rightarrow \arctan(2(x+4y)) = 2x + k \quad (k := 2c)$$

$$\Rightarrow 2x + 8y = \tan(x + k)$$

$$\Rightarrow y = \frac{\tan(x+k) - 2x}{8}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Équations exactes

Exemple 1.2.10. Solution sous forme implicite. Soit l'EDO $2x + 2yy' = 0$. C'est une équation à variables séparables, donc on a simplement

$$\begin{aligned}2x + 2yy' = 0 &\Rightarrow 2yy' = -2x \\ &\Rightarrow \int 2ydy = - \int 2xdx \\ &\Rightarrow y^2 = -x^2 + C \\ &\Rightarrow y^2 + x^2 = C.\end{aligned}$$

Si on pose $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$, alors les solutions de cette EDO ont la forme $\varphi(x, y) = C$. On appelle cela la *forme implicite* de la solution.

Considérons $\varphi(x, y) = k$ comme une solution implicite générale d'une EDO de la forme $y' = f(x, y)$. Les courbes de niveau de φ sont les courbes intégrales de l'EDO (le « graphe » des solutions).

Inversement, considérons une fonction $\varphi: (x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ et considérons ses courbes de niveau $\varphi(x, y) = C$ pour $C \in \mathbb{R}$. En dérivant de chaque côté, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\varphi(x, y(x)) &= \frac{d}{dx}C \\ \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' &= 0.\end{aligned}$$

C'est une EDO qui a $\varphi(x, y) = C$ comme solution générale.

Considérons une EDO de la forme $p(x, y) + q(x, y)y' = 0$.

Question Est-il possible de trouver une fonction φ de sorte que $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = p$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = q$? Autrement dit, existe-t-il φ telle que $\nabla\varphi = (p, q)$?

Lorsque la réponse est oui, on dit que l'EDO est *exacte*.

Lemme 1.2.4. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine et soit $p, q: D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 . Si l'EDO $p(x, y) + q(x, y)y' = 0$ est exacte, alors

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (\text{Condition d'intégrabilité})$$

Démonstration. Comme l'EDO est exacte, il existe φ telle que $p = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$. Le théorème de Schwarz nous donne

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

□

La réciproque **est fautive**, c'est-à-dire que la condition d'intégrabilité n'est pas suffisante pour conclure que l'équation est exacte.

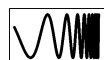
Contre-exemple. Soit

$$p(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$. Alors, un petit calcul montre que

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x},$$

mais il n'existe aucune φ de sorte que $\nabla\varphi = (p, q)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$. En effet, si une telle fonction devait exister, ce serait $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, mais elle n'est pas bien définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$.



Le problème du contre-exemple est le point à l'origine. Les fonctions p, q se comportent mal dans un voisinage de $(0, 0)$, donc il faut « trouser » le domaine. Le contre-exemple peut donc sembler artificiel, mais il est plutôt universel et se trouve au cœur de l'analyse complexe.

On peut énoncer un cas particulier où la réciproque est vraie, mais on pourra seulement la démontrer plus tard.

Théorème 1.2.5. Soit $p, q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . Si p et q satisfont à la condition d'intégrabilité du lemme 1.2.4, alors il existe φ telle que $\nabla\varphi = (p, q)$ sur \mathbb{R}^2 .

Exemple 1.2.11. $y' = \frac{y \sin(xy)}{1 - x \sin(xy)}$.

On peut réécrire l'équation $-y \sin(xy) + (1 - x \sin(xy))y' = 0$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(-y \sin(xy)) &= -\sin(xy) - xy \cos(xy) \\ \frac{\partial}{\partial x}(1 - x \sin(xy)) &= -\sin(xy) - xy \cos(xy). \end{aligned}$$

Comme le champ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , l'EDO est exacte. On cherche à résoudre $\nabla\varphi = (p, q)$, donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -y \sin(xy) \Rightarrow \int \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx = - \int y \sin(xy) dx,$$

ce qui donne $\varphi(x, y) = \cos(xy) + h(y)$. Ici la « constante d'intégration » est une fonction qui dépend de y , car on a intégré par rapport à x seulement. On dérive cette équation pour obtenir

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos(xy) + h(y)) = -x \sin(xy) + h'(y).$$

On a également l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = (1 - x \sin(xy)),$$

donc en combinant, on trouve

$$h'(y) = 1.$$

On conclut que $\varphi(x, y) = y + \cos(xy) + C$.

Facteurs intégrants (ou exactifiant)

Il est parfois possible d'ajouter un facteur $\mu(x, y)$ à l'EDO pour la rendre exact. Une telle fonction est appelée *facteur intégrant*. Ainsi, on regarde à l'équation

$$\mu(x, y)p(x, y) + \mu(x, y)q(x, y)y' = 0.$$

Cette méthode est seulement utile s'il est possible de rendre exacte l'équation en prenant un μ qui dépend soit de x , soit de y , mais des deux.

Exemple 1.2.12. $xy + 2xy' = 0$. Notons dès maintenant que l'équation se résout par séparation de variables, mais on choisit d'utiliser la méthode du facteur intégrant pour illustrer son utilisation.

1. On vérifie si l'équation est exacte. On a

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy) = x \neq \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2.$$

2. On vérifie si l'on peut multiplier l'équation par un $\mu(y)$ pour la rendre exacte : $xy\mu(y) + 2x\mu(y)y' = 0$. On a

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy\mu(y)) = x\mu + xy\mu' \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x}(2x\mu(y)) = 2\mu.$$

On veut obtenir l'égalité

$$x\mu + xy\mu' = 2\mu,$$

mais cette équation fait intervenir des x et des y , donc il est faux de supposer que μ puisse dépendre *seulement* de y .

3. On vérifie la même chose pour x : $xy\mu(x) + 2x\mu(x)y' = 0$. On a

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy\mu(x)) = x\mu \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x}(2x\mu(x)) = 2\mu + 2x\mu'.$$

On veut obtenir l'égalité

$$x\mu = 2\mu + 2x\mu'.$$

Ça fonctionne ! Il n'y a plus de y . On doit résoudre la nouvelle EDO $x\mu = 2\mu + 2x\mu'$. On a

$$\begin{aligned} 2x\mu' &= x\mu - 2\mu \\ \Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} &= \int \frac{x-2}{2x} dx \\ \Rightarrow \log |\mu| &= \frac{x}{2} - \log |x| + C \\ \Rightarrow |\mu| &= \frac{e^C e^{\frac{x}{2}}}{|x|} \\ \Rightarrow \mu &= k \frac{e^{\frac{x}{2}}}{|x|}, \quad k \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

4. Nouvelle EDO. Notre EDO de départ devient

$$xyk \frac{e^{\frac{x}{2}}}{|x|} + 2xk \frac{e^{\frac{x}{2}}}{|x|} y' = 0.$$

Constatons qu'il n'était pas nécessaire d'introduire la constante k , car on peut maintenant diviser l'équation par k et donc l'ignorer. De la même façon, on peut ignorer la valeur absolue de x , car on peut multiplier l'équation par -1 au besoin. On se concentre donc sur la nouvelle équation simplifiée

$$ye^{\frac{x}{2}} + 2e^{\frac{x}{2}} y' = 0$$

qui est exacte.

5. Trouver φ . On cherche une fonction $\varphi: (x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ telle que

$$\varphi_x := \frac{\partial \varphi}{\partial x} = ye^{\frac{x}{2}}$$

$$\varphi_y := \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2e^{\frac{x}{2}}.$$

On a

$$\begin{aligned} \varphi_x &= ye^{\frac{x}{2}} \\ \Rightarrow \int \varphi_x dx &= \int ye^{\frac{x}{2}} dx \\ \Rightarrow \varphi &= 2ye^{\frac{x}{2}} + h(y). \end{aligned}$$

On dérive cette dernière équation par rapport à y pour obtenir $\varphi_y = 2e^{\frac{x}{2}} + h'(y)$. On combine avec l'autre expression de φ_y

$$\varphi_y = 2e^{\frac{x}{2}} + h'(y) = 2e^{\frac{x}{2}},$$

donc $h'(y) = 0$.

5. On conclut que $\varphi(x, y) = 2ye^{\frac{x}{2}} + C$ est la fonction recherchée. Comme on peut isoler y , on peut trouver la solution explicite, qui est $y = \frac{K}{2} e^{\frac{-x}{2}}$.

1.3. Existence et unicité des solutions

Dans tout le travail accompli jusqu'à maintenant, on s'est très peu soucié de la possibilité qu'une EDO n'ait aucune solution. Cette section indique qu'il n'est jamais vain de chercher des solutions dès que l'EDO est *suffisamment régulière*. (Dans bien des cas, ceci se traduit par « de classe C^1 ».)

1.3.1 Problème de Cauchy

On a seulement cherché les solutions générales d'une EDO. Par contre, il n'est pas rare que dans un problème, on cherche une solution spécifique qui satisfait à une *condition initiale*.

Exemple 1.3.1. On considère la solution générale $y = Ce^x$ de l'EDO $y' = y$. La solution spécifique qui satisfait à la condition $y(0) = 1$ est $y = e^x$. C'est la solution au problème à valeur initiale

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Définition 1.3.1. Soit $F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$ une EDO d'ordre n . Soit $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ des constantes. On appelle le système suivant

$$\begin{cases} F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

un *problème de Cauchy*.

Exemple 1.3.2. La vitesse d'une particule est donnée par l'EDO $x'(t) = \frac{x}{t}$. Trouver sa trajectoire, sachant qu'elle passe par $x = 1$ lorsque $t = \frac{1}{2}$.

Solution. Le problème se traduit au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{t} \\ x\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

L'EDO se résout par séparation de variables et on trouve $x(t) = Ct$. La condition initiale est $x\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, donc $\frac{C}{2} = 1$. La solution au problème de Cauchy est $x(t) = 2t$.

1.3.2 Théorème d'existence et d'unicité au problème de Cauchy

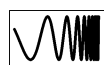
On énonce sans démontrer une version puissante du théorème d'existence et d'unicité des solutions d'une EDO de tout ordre.

Théorème d'existence et d'unicité 1.3.2. Soit f une fonction des variables x_1, \dots, x_{n+1} de classe C^1 . Soit $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1})$ un point dans le domaine de f . Alors il existe un intervalle maximal ouvert I content x_0 et une unique fonction $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} telle que φ satisfait au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

L'intervalle I est maximal au sens suivante : si I_0 est un autre intervalle contenant x_0 et $\varphi_0: I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ est une autre solution au problème de Cauchy, alors $I_0 \subseteq I$ et $\varphi_0(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in I_0$.

La démonstration dépasse largement le cadre du cours. Elle utilise le théorème de point fixe de Banach. Les outils utilisés sont habituellement vus dans un cours d'analyse 3. Ce qu'il faut retenir, c'est qu'il n'est pas vain de chercher une solution à une EDO $y' = f(x, y)$ ou $y'' = f(x, y, y')$ sachant que f est de classe C^1 . Par contre, le théorème n'indique d'aucune façon comment trouver les solutions, c'est la raison pourquoi on a besoin des techniques de résolution.



Remarque. L'hypothèse que f soit de C^1 se remplace par *localement Lipschitz*. Dans ce cas, la solution φ est seulement de classe C^n .

Voici un exemple qui illustre la puissance de l'unicité du théorème.

Exemple 1.3.3. Identités trigonométriques. Soit $y'' + y = 0$ une EDO d'ordre deux. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = A \\ y'(0) = B \end{cases}$$

On vérifie aisément que $y_1 = A \cos x + B \sin x$ est une solution. De plus, son intervalle d'existence est \mathbb{R} , donc il est certainement maximal.

Ensuite, pour $|A|, |B| \leq 2$, on vérifie que $y_2 = \cos(x + a) + \sin(x + b)$ est aussi une solution. En remplaçant dans les conditions initiales, on trouve

$$y_2(0) = \cos a + \sin b = A,$$

$$y_2'(0) = -\sin a + \cos b = B.$$

Ainsi, par unicité, on a $y_1 = y_2$, c'est-à-dire

$$(\cos a + \sin b) \cos x + (-\sin a + \cos b) \sin x = \cos(x + a) + \sin(x + b).$$

En évaluant en $x = -b$, on obtient

$$\cos(a - b) = \cos a \sin b + \sin a \sin b.$$

En évaluant en $x = -a$, on trouve

$$\sin(b - a) = \sin b \cos a - \cos b \sin a.$$

1.4. Équations linéaires du premier ordre

On étudie un type particulier, mais très important, d'EDO.

Définition 1.4.1. L'EDO $y' = f(x, y)$ est dite *linéaire* si $f(x, y) = p(x)y + q(x)$, c'est-à-dire que f est un polynôme de degré un en y . Elle est dite *homogène* si $q(x) = 0$ pour tout x . Sinon, elle est dite *inhomogène*.

Le théorème d'existence et d'unicité des solutions garantit l'existence d'une solution.

Corollaire 1.4.2. L'EDO linéaire $y' = p(x)y + q(x)$ possède une solution si p et q sont de classe C^1 .

Démonstration. Il suffit de constater qu'alors, $f(x, y) = p(x)y + q(x)$ est de classe C^1 , donc tout problème de Cauchy associé à cette équation possède une solution sur un certain intervalle. □

Pour trouver les solutions, on étudie séparément les cas $q \equiv 0$ et $q \not\equiv 0$.

1.4.1 Équation homogène

Étant donné leur forme rigide, on peut en dire un peu plus sur une EDO linéaire homogène que sur une équation quelconque.

Dans le lemme, on utilise la notation $C^1[a, b]$: une fonction p de classe $C^1[a, b]$ est une fonction définie sur au moins l'intervalle $[a, b]$ et de classe C^1 sur $[a, b]$.

Lemme 1.4.3. Soit l'EDO $y' = p(x)y$ homogène. Si p est de classe $C^1[a, b]$, alors l'ensemble des solutions

$$\mathcal{S} = \{y \in C^1[a, b] : y' = p(x)y, x \in [a, b]\}$$

forme un espace vectoriel réel de dimension 1.

Avant de faire la démonstration, prenons un instant pour observer les implications du lemme. Si \mathcal{S} est un espace vectoriel réel, alors étant donné une solution $y \in \mathcal{S}$, on aura également $\lambda y \in \mathcal{S}$ pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus, puisque sa dimension est de 1, toutes les solutions sont équivalentes à facteurs scalaires près, c'est-à-dire que pour deux solutions $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$, il existe un scalaire λ tel que $y_2 = \lambda y_1$. Ou autrement dit, si on a trouvé une solution $y \neq 0$, alors toutes les autres solutions sont données par λy , où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Commençons par montrer que $y := \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \mathcal{S}$.

Il est clair que y est de classe C^1 et définie sur $[a, b]$. Ensuite, en dérivant, on a

$$\begin{aligned} y' &= \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' \\ &= \alpha_1 p(x) y_1 + \alpha_2 p(x) y_2 \\ &= p(x) (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \\ &= p(x) y, \end{aligned}$$

donc y est une solution de $y' = p(x)y$, d'où $y \in \mathcal{S}$. On conclut que \mathcal{S} est un espace vectoriel.

Pour montrer que \mathcal{S} est de dimension 1, on utilise le théorème d'existence et d'unicité. Soit $y \in \mathcal{S}$ une solution non constante et $z \in \mathcal{S}$ une autre solution. Puisque y est non constante, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $y(x_0) \neq 0$. On pose

$$u(x) = \frac{z(x_0)}{y(x_0)}y(x).$$

Ainsi, u et z sont deux solutions au problème de Cauchy

$$\begin{cases} w' = p(x)w; \\ w(x_0) = z(x_0). \end{cases}$$

Par le théorème d'existence et d'unicité, on a $u = z$, donc $z(x_0)y = y(x_0)z$. D'où \mathcal{S} est de dimension 1. □

On peut trouver la solution de l'équation homogène simplement par séparation de variables. On a

$$\begin{aligned} y' &= p(x)y \\ \Rightarrow \frac{y'}{y} &= p(x) \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{y} &= \int p(x)dx + c \\ \Rightarrow \log |y| &= \int p(x)dx + c \\ \Rightarrow |y| &= e^c \exp\left(\int p(x)dx\right) \\ \Rightarrow y &= \pm e^c \exp\left(\int p(x)dx\right) \\ \Rightarrow y &= K \exp\left(\int p(x)dx\right), \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Par le lemme 1.4.3, on sait que toutes les solutions ont été trouvées. On choisit comme base de l'espace vectoriel \mathcal{S} le vecteur $\varphi(x) = e^{\int_{x_0}^x p(t)dt}$. Toutes les autres solutions s'écrivent comme $K\varphi$. On peut aussi dire que φ engendre l'espace vectoriel ou bien que \mathcal{S} est engendré par φ .

1.4.2 Équation inhomogène

On traite maintenant du cas un peu plus compliqué. On ne peut pas résoudre l'équation inhomogène $y' = p(x)y + q(x)$ par séparation de variable. Commençons par décrire l'espace des solutions.

Lemme 1.4.4. (*Principe de superposition*) Soit y_1 et y_2 deux solutions de $y' = p(x)y + q(x)$. Alors $y_3 = y_2 - y_1$ est une solution de l'équation homogène $y' = p(x)y$.

Démonstration. On dérive simplement y_3 pour obtenir

$$y_3' = y_2' - y_1'$$

$$\begin{aligned}
&= (p(x)y_2 + q(x)) - (p(x)y_1 + q(x)) \\
&= p(x)y_2 - p(x)y_1 \\
&= p(x)(y_2 - y_1) \\
&= p(x)y_3.
\end{aligned}$$

□

On sait que $y_3 = C \exp(\int p(x)dx)$, donc on obtient la conséquence suivante

$$y_2(x) = y_1(x) + C \exp(\int p(x)dx).$$

Comme deuxième conséquence, on déduit que toutes les solutions de l'équation inhomogène sont obtenues comme-ci. En effet, si y_4 était une autre solution, alors la même procédure montrerait que $y_4 = y_1 + C_4 e^{\int p(x)dx}$.

Définition 1.4.5. Soit y_h une solution non constante de $y' = p(x)y$. On l'appelle *la solution homogène* de $y' = p(x)y + q(x)$. Une solution de $y' = p(x)y + q(x)$ est appelée une *solution particulière* et est notée y_p .

Avec la terminologie de la définition, la solution générale de $y' = p(x)y + q(x)$ est de la forme $y = y_h + y_p$. On sait déjà trouver y_h . On montre maintenant une technique qui permet de trouver une solution particulière.

Lemme 1.4.6. (*Variation du paramètre*) Soit P une primitive donnée de p (c-à-d que $P'(x) = p(x)$). Alors il existe une fonction dérivable u pour laquelle $z(x) := u(x)e^{P(x)}$ est une solution de $y' = p(x)y + q(x)$.

Remarque. Le terme « variation du paramètre » s'explique par le fait qu'on fait varier la constante C en fonction de x dans l'expression de la solution homogène $Ce^{\int p(x)dx}$.

Démonstration. Supposons qu'une telle u existe et dérivons z . On a

$$\begin{aligned}
z &= u(x)e^{P(x)} \\
\Rightarrow z' &= u'e^{P(x)} + up(x)e^{P(x)}.
\end{aligned}$$

Ensuite, comme z est une solution, on a aussi $z' = p(x)z + q(x)$. En remplaçant la dérivée ci-haut dans l'EDO de départ, on a

$$\begin{aligned}
u'e^{P(x)} + up(x)e^{P(x)} &= p(x)\left(ue^{P(x)}\right) + q(x) \\
\Rightarrow u'e^{P(x)} &= q(x).
\end{aligned}$$

La fonction u recherchée est

$$u(x) = \int q(x)e^{-P(x)}dx.$$

Cette fonction est dérivable par le théorème fondamentale du calcul.

□

Remarque. On a utilisé le symbole de l'intégrale au sens où on « prend une primitive quelconque ». Si l'on veut être rigoureux, on peut écrire toutes ces intégrales avec leurs bornes pour obtenir la solution générale sous la forme

$$y(x) = C \exp\left(\int_{x_0}^x p(t) dt\right) + \int_{x_0}^x q(t) \exp\left(-\int_{x_0}^t p(s) ds\right) dt.$$

Ici, les variables s et t sont muettes ; leur seul rôle est d'être intégré et elles peuvent ainsi être remplacées par n'importe quels symboles autre que x .

Exemple 1.4.1. $y' = -\frac{1}{x}y + 1$, ($x > 0$).

(Notons que cette équation se résout aussi par le changement de variable $u = \frac{y}{x}$.)

1. Solution homogène : on a

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{y}{x} \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \log |y| &= -\log |x| + k \\ \Rightarrow |y| &= \frac{e^k}{|x|} \\ \Rightarrow y &= \pm \frac{e^k}{|x|} \\ \Rightarrow y &= \frac{C}{|x|} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}^* \\ \Rightarrow y_h &= \frac{C}{x}. \end{aligned} \quad (\text{car } x > 0)$$

2. Solution particulière : on pose $y_p = u(x)y_h = \frac{u(x)}{x}$, en prenant $C = 1$. On a

$$y_p' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}$$

et

$$\begin{aligned} y_p' &= p(x)y_p + q(x) \\ &= -\frac{1}{x}y_p + 1 \\ &= -\frac{u}{x^2} + 1. \end{aligned}$$

On obtient $\frac{u'}{x} = 1$, donc $u = \frac{x^2}{2}$. La solution particulière est $y_p = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$.

3. Solution générale : $y(x) = y_h + y_p = \frac{C}{x} + \frac{x}{2}$.

Exemple 1.4.2. Problème de mélange. Un réservoir de 120L se remplit à un débit de 4L/min d'une solution d'eau salée à 2g de sel par litre. Il y a 3L/min de liquide qui s'écoule du réservoir. Au début de l'expérience, il y a 90L d'eau salée dans lequel est dissous 90g de sel.

Quelle sera la quantité de sel dans le réservoir quand celui-ci sera plein, en supposant que le sel se mélange uniformément instantanément ?

Solution. Posons $y(t)$ la quantité de sel (en g) dans le réservoir au temps t (en min). Le problème se modélise par l'EDO suivante

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \text{taux de variation de sel dans le réservoir} \\ &= \text{taux d'entrée} - \text{taux de sortie} \\ &= \frac{2\text{g}}{L} \times \frac{4L}{\text{min}} - \underbrace{\frac{y(t)}{V(t)}}_{\substack{\text{proportion de sel} \\ \text{dans le réservoir} \\ \text{au temps } t}} \times \frac{3L}{\text{min}}, \end{aligned}$$

où $V(t) = 90 + t$ est le volume de liquide dans le réservoir au temps t .

Ceci nous donne le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y' = \overbrace{\left(-\frac{3}{90+t}\right)}^{p(t)} y + \overbrace{8}^{q(t)}, \\ y(0) = 90. \end{cases}$$

1. Solution homogène : on a $y_h = C \exp\left(\int -\frac{3}{90+t} dt\right)$. Ici, on résout l'intégrale par

$$-\int \frac{3}{90+t} dt = -3 \log |90+t| = \log \left(\frac{1}{(90+t)^3} \right).$$

La solution homogène est donc $y_h = \frac{C}{(90+t)^3}$.

2. Solution particulière : on pose $y_p = u(t) \frac{1}{(90+t)^3}$. D'une part, en dérivant, on obtient

$$y'_p = \frac{u'}{(90+t)^3} - \frac{3u}{(90+t)^4}$$

et d'autre part, en substituant dans $y'_p = p(x)y_p + 8$, on trouve

$$y'_p = \frac{-3}{(90+t)} \frac{u(t)}{(90+t)^3} + 8,$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{u'}{(90+t)^3} &= 8 \\ \Rightarrow u' &= 8(90+t)^3 \\ \Rightarrow \int du &= 8 \int (90+t)^3 dt \\ \Rightarrow u &= 2(90+t)^4 \\ \Rightarrow y_p &= 2 \frac{(90+t)^4}{(90+t)^3} = 2(90+t).\end{aligned}$$

3. Solution générale :

$$y = y_h + y_p = \frac{C}{(90+t)^3} + 2(90+t), \quad (C \in \mathbb{R}).$$

4. Solution au problème de Cauchy : on veut $y(0) = 90$, donc

$$\frac{C}{90^3} + 2(90) = 90 \Rightarrow C = -90^4.$$

La solution est donc

$$y = -\frac{90^4}{(90+t)^3} + 2(90+t).$$

5. Conclusion : il y aura $y(30) = \frac{-90^4}{120^3} + 240 \approx 202$ g de sel dans le réservoir lorsqu'il sera plein.

1.5. Équations du deuxième ordre

Les équations du deuxième ordre prennent la forme la plus générale par

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

où $F: (x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto F(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 . Or, on regardera aux équations de la forme $y'' = f(x, y, y')$.

1.5.1 Réduction à des équations d'ordre 1

Il est parfois possible de se ramener à une équation d'ordre 1. Il est toujours possible de se ramener à *un système* de deux équations d'ordre 1.

1^{er} cas. Lorsque y est absent.

Lorsque l'EDO prend la forme $y'' = f(x, y')$, alors on pose $z(x) = y'(x)$. Ainsi, on obtient

$$z'(x) = y''(x) = f(x, z).$$

La nouvelle EDO, $z' = f(x, z)$, est d'ordre 1.

Exemple 1.5.1. $y'' + 2xy' = -x$. Cette équation ne dépend pas de y . On pose $z(x) = y'(x)$. L'EDO devient

$$z' + 2xz = -x.$$

On la résout par séparation de variables. On a

$$\begin{aligned} z' &= -2xz - x \\ \Rightarrow z' &= -x(1 + 2z) \\ \Rightarrow \int \frac{dz}{1 + 2z} &= - \int x dx \\ \Rightarrow \log |1 + 2z| &= -x^2 + k \\ \Rightarrow |1 + 2z| &= e^k e^{-x^2} \\ \Rightarrow 1 + 2z &= C e^{-x^2} && (C := \pm e^k) \\ \Rightarrow z &= D e^{-x^2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Attention, ceci n'est pas la solution ! On doit maintenant résoudre $z = y'$. On a

$$\begin{aligned} y' &= D e^{-x^2} - \frac{1}{2} \\ \Rightarrow y(x) &= \int_{x_0}^x \left(\frac{-1}{2} + D e^{-t^2} \right) dt \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{x_0}{2} + D \int_{x_0}^x e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale n'a aucune expression donnée à partir de fonctions élémentaires, donc on la laisse ainsi.

2^e cas. Lorsque x est absent.

Lorsque l'EDO prend la forme $y'' = f(y, y')$, on pose $z(y(x)) = y'(x)$. Ainsi on obtient

$$\frac{d}{dx} z(y(x)) = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z' z = y'' = f(y, y').$$

Ceci nous donne l'EDO d'ordre un $z'(y)z(y) = f(y, z)$.

Exemple 1.5.2. $y'' = \frac{y'}{y^2}$. La variable x n'apparaît pas explicitement dans cette équation.

On pose $z(y(x)) = y'(x)$. On a

$$\frac{dz}{dy} z = y'' = \frac{y'}{y^2} = \frac{z}{y^2}.$$

Pour résoudre, on fait

$$\begin{aligned}z'z &= \frac{z}{y^2} \\ \Rightarrow z' &= \frac{1}{y^2} \\ \Rightarrow \int dz &= \int \frac{dy}{y^2} \\ \Rightarrow z &= -\frac{1}{y} + C.\end{aligned}$$

Ensuite, on doit résoudre $y' = z(y) = -\frac{1}{y} + C$. On a

$$\begin{aligned}y' &= z \\ \Rightarrow y' &= -\frac{1}{y} + C \\ &= \frac{-1 + Cy}{y} \\ \Rightarrow \int \frac{y}{Cy - 1} dy &= \int dx \\ \Rightarrow \frac{1}{C^2} \int \frac{u + 1}{u} du &= x + D \\ \Rightarrow \frac{1}{C^2} (u + \log |u|) &= x + D \\ \Rightarrow \frac{1}{C^2} (Cy - 1 + \log |Cy - 1|) &= x + D.\end{aligned}$$

$u = Cy - 1$
$du = C dy$

La solution est implicite. On ne peut isoler y .

Les autres cas. Pour une équation quelconque $y'' = f(x, y, y')$, on pose

$$\begin{cases} u_0(x) = y(x) \\ u_1(x) = y'(x) \end{cases}$$

et on obtient le système

$$\begin{cases} u_0' = u_1 \\ u_1' = f(x, u_0, u_1). \end{cases}$$

Exemple 1.5.3. $y'' - \lambda^2 y = 0$. Ceci est l'équation des ondes en une dimension (une corde vibrante). On pose $u_0 = y$ et $u_1 = y'$. On obtient le système

$$\begin{cases} u_0' = u_1; \\ u_1' = \lambda^2 u_0. \end{cases}$$

On ne verra pas comment résoudre un système d'équations différentielles ordinaires, mais il est important de savoir que tout système d'ordre n peut se ramener à un système de n équations d'ordre 1.

1.5.2 Équations linéaires du deuxième ordre

On commence avec un peu de terminologie.

Définition 1.5.1. Soit $F(x, y, y', y'') = 0$ une EDO d'ordre deux.

1. Elle est dite *linéaire* si elle s'écrit $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$ où p, q, r sont des fonctions continues.
2. Lorsque p, q sont constantes, alors elle est dite à *coefficients constants*.
3. Pour une EDO linéaire, si on a $r \equiv 0$, alors elle est dite *homogène*. Sinon on dit qu'elle est *inhomogène*.

Les idées sont les mêmes que pour l'EDO linéaire d'ordre 1. L'ensemble des solutions

$$\mathcal{S} = \{y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid y \in C^2[a, b], y'' = p(x)y' + q(x)y\}$$

forme un espace vectoriel, mais de dimension 2 cette fois. On cherche donc deux solutions *linéairement indépendantes*.

Définition 1.5.2. Soit $I \in \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f_1, f_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentes de la fonction constante nulle.

1. On dit que f_1 et f_2 sont *linéairement indépendantes* si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$ est l'unique solution de

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

2. On dit que f_1 et f_2 sont *linéairement dépendantes* s'ils ne sont pas linéairement indépendantes.

Exemple 1.5.4. $y'' = -y$. Montrer que $y_1 = \sin x$ et $y_2 = \cos x$ et qu'elles sont linéairement indépendantes.

Solution. Il suffit de voir que $y_1'' = -\sin x$ et $y_2'' = -\cos x$.

Ensuite, si $\lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors en $x = 0$ on trouve

$$0 + \lambda_2 = 0$$

et en $x = \frac{\pi}{2}$,

$$\lambda_1 + 0 = 0,$$

d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Pour le cours, on aura à montrer l'indépendance linéaire de deux solutions d'EDO linéaires homogènes. Voici un outil qui permet de le faire.

Proposition 1.5.3. Soit $y'' = p(x)y' + q(x)y$ une EDO linéaire homogène d'ordre 2. Soit y_1 et y_2 deux solutions. On définit le Wronskien par

$$W(y_1, y_2)(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

1. $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ pour tout x si et seulement s'il existe x tel que $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$;
2. y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes si et seulement si $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ pour au moins un x .

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)'(x) &= (y_1 y_2' - y_1' y_2)' \\ &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' \\ &= y_1 y_2'' - y_1'' y_2 \\ &= y_1(-p(x)y_2' - q(x)y_2) - y_2(-p(x)y_1' - q(x)y_1) \\ &= -p(x)(y_1 y_2' - y_1' y_2) \\ &= -p(x)W(y_1, y_2)(x). \end{aligned}$$

Ainsi, $W(y_1, y_2)$ est une solution de l'EDO linéaire $z' = -p(x)z$, dont la solution générale est $z(x) = Ce^{-P(x)}$, où P est une primitive de p . Il suit qu'il existe une constante $A \in \mathbb{R}$ telle que

$$W(y_1, y_2)(x) = Ae^{-P(x)}.$$

Pour montrer 1, on remarque que s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$, alors $A = 0$ et donc $W(y_1, y_2) \equiv 0$. Par contre, s'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $W(y_1, y_2)(x_1) \neq 0$, alors $A \neq 0$ et donc $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On montre maintenant 2. Si y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $y_1 = \lambda y_2$. Si on dérive, on obtient $y_1' = \lambda y_2'$ et donc

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_2' & y_2' \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Réciproquement, si $W(y_1, y_2) \equiv 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} = \lambda_x \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}.$$

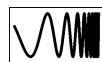
On pose $y_0 := y_1(0)$, $y_0' := y_1'(0)$ et $z(x) = \lambda_0 y_2(x)$. On voit que $z(0) = \lambda_0 y_2(0) = y_1(0) = y_0$ et $z'(0) = \lambda_0 y_2'(0) = y_1'(0) = y_0'$, donc z est une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_0'. \end{cases}.$$

Or, y_1 est aussi une solution de ce problème, donc par unicité, on a $y_1 = z$, c'est-à-dire $y_1 = \lambda_0 y_2$, d'où y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes. □

On utilisera le corollaire suivant plus tard, qui est une conséquence logique directe de la proposition précédente.

Corollaire 1.5.4. Soit y_1 et y_2 deux solutions de l'EDO homogène $y'' + p(x)y' + q(x) = 0$. Si y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes, alors $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

 Il ne faut pas associer des propriétés illusoire au Wronskien. Dans la proposition précédente, on demande l'hypothèse que y_1 et y_2 soient des solutions d'une EDO linéaire homogène d'ordre 2. Sans cette hypothèse, on peut obtenir des surprises.

Pour deux fonctions dérivables quelconques z_1 et z_2 , il est possible que $W(z_1, z_2) \equiv 0$ même si z_1 et z_2 sont linéairement indépendantes. En effet, le contre-exemple classique est $z_1(x) = x^2$ et $z_2(x) = x|x|$. Elles sont toutes deux de classe C^1 avec

$$z_1'(x) = 2x, \quad z_2'(x) = 2|x|$$

et il est clair qu'elles sont linéairement indépendantes. Par contre, lorsque que l'on calcule le Wronskien, on obtient

$$W(z_1, z_2)(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} = 0.$$

Équations à coefficients constants

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ trois constantes. Une EDO linéaire à coefficients constants prend la forme

$$ay'' + by' + cy = r(x).$$

On peut trouver les solutions de l'équation homogène ($r \equiv 0$) comme suit. On propose une *ansatz* $y = e^{\lambda x}$. Si on remplace dans l'EDO, on obtient

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0.$$

Les exponentielles se simplifient pour donner l'équation algébrique $p(\lambda) := a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. On conclut donc que

$y = e^{\lambda x}$ est une solution si et
seulement si λ est une racine de $p(\lambda)$.

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le *discriminant* de $p(\lambda)$. Il y a trois cas possibles.

1^{er} cas : $\Delta > 0$. Le polynôme possède deux racines réelles distinctes données par la formule quadratique

$$\lambda_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \lambda_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Les deux solutions associées $y_+ = e^{\lambda_+ x}$ et $y_- = e^{\lambda_- x}$ sont linéairement indépendantes.

Exercice 1. Montrer que y_+ et y_- sont linéairement indépendantes.

2^e cas : $\Delta < 0$. Le polynôme possède deux racines complexes distinctes. Elles sont conjuguées complexes l'une de l'autre. La formule quadratique donne

$$\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad \text{où } i^2 = -1.$$

On pose $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Les deux racines sont donc

$$\lambda_- = \alpha - i\beta \quad \text{et} \quad \lambda_+ = \alpha + i\beta.$$

Rappelons que la *formule d'Euler* donne

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

On a donc

$$\begin{aligned} e^{\lambda_+ x} &= e^{\alpha x} e^{i\beta x} \\ &= e^{\alpha x} \left(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x) \right). \end{aligned}$$

Les deux solutions sont alors

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{et} \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Exercice 2. Vérifier que y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

Remarque. On pourrait aussi regarder à $e^{\lambda_- x}$, mais on ne ferait qu'obtenir deux solutions linéairement dépendantes aux deux premières trouvées.

3^e cas : $\Delta = 0$. Il n'y a qu'une racine double. Elle est donnée par

$$\lambda = \frac{-b}{2a}.$$

On a donc une première solution $y_1 = e^{\lambda x}$.

Pour trouver la deuxième solution, on utilise la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution $y_2(x) = u(x)e^{\lambda x} = u(x)y_1(x)$. On dérive

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= u'y_1 + uy_1' \\ y_2''(x) &= u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''. \end{aligned}$$

On remplace dans l'EDO

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= 0 \\ &= a(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + b(u'y_1 + uy_1') + cuy_1 \\ &= u \underbrace{(ay_1'' + by_1' + cy_1)}_{=0} + u'(2ay_1' + by_1) + u''ay_1 = 0 \\ &= u'(2a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x}) + u''ae^{\lambda x} = 0 \\ &= u' \underbrace{(2a\lambda + b)}_{=0} + u''a = 0 \qquad \text{car } \lambda = \frac{-b}{2a} \\ &= u''a = 0. \end{aligned}$$

On conclut que $u'' = 0$, donc la solution est $u(x) = c_1x + c_2$. Prenons $c_1 = 1$ et $c_2 = 0$.

La deuxième solution est donc $y_2(x) = xe^{\lambda x}$.

Exercice 3. Vérifier que y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

Exemple 1.5.5. Soit l'EDO linéaire d'ordre 2

$$y'' + 16y = 0.$$

Le polynôme associé est $p(\lambda) = \lambda^2 + 16$. Le discriminant du polynôme est $\Delta = -64$. Ainsi, le polynôme a deux racines complexes conjuguées. Les racines sont $\lambda_{\pm} = \pm 4i$. Les solutions linéairement indépendantes sont donc

$$y_1(x) = C \cos(4x),$$

$$y_2(x) = D \sin(4x).$$

La solution générale est $y = y_1 + y_2$.

Exemple 1.5.6. Soit l'EDO linéaire homogène

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Le polynôme associé est $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$. Son discriminant est $\Delta = 1 + 8 = 9$. Le polynôme a donc deux racines réelles données par $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$. Les solutions linéairement indépendantes sont donc

$$y_1 = Ce^{2x},$$

$$y_2 = De^{-x}.$$

La solution générale est $y = y_1 + y_2$.

Exemple 1.5.7. Soit l'EDO

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 = 0$. Le polynôme $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$ possède la racine double $\lambda = -1$. Les solutions linéairement indépendantes sont donc

$$y_1(x) = Ce^{-x},$$

$$y_2(x) = Dxe^{-x}.$$

La solution générale est $y = y_1 + y_2$.

Équation inhomogène

On veut maintenant résoudre $ay'' + by' + cy = r(x)$. Pour trouver la solution, il reste à trouver une solution particulière y_p . La solution générale sera alors $y = y_p + y_h$, où y_h est la solution générale de l'équation homogène, à savoir $y_h = y_1 + y_2$.

Méthode des coefficients indéterminés

L'idée est de prendre y_p comme ayant la même forme que $r(x)$.

Type de $r(x)$	Choix de y_p	À déterminer
$ae^{\alpha x}$	$Ce^{\alpha x}$	C
$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots$	$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$	$a_j \ (j = 1, \dots, n)$
$\alpha \cos(wx) + \beta \sin(wx)$	$a \cos(wx) + b \sin(wx)$	a, b
$e^{\alpha x} (\beta \cos(wx) + \gamma \sin(wx))$	$e^{\alpha x} (a \cos(wx) + b \sin(wx))$	a, b

Cette méthode est bien pratique si r figure dans le tableau, mais sinon il faudra utiliser une autre méthode.

Exemple 1.5.8. $y'' + 4y = 4e^{2x}$.

1. Solution homogène : le polynôme est $p(\lambda) = \lambda^2 + 4$. Ses racines sont $\lambda = \pm 2i$. Les solutions de l'équation homogène sont $y_1 = C_1 \cos(2x)$ et $y_2 = C_2 \sin(2x)$.
2. Solution particulière : par la méthode des coefficients indéterminés, on pose comme *ansatz* $y_p = Ce^{2x}$. On cherche à déterminer C . On a

$$y_p'' + 4y_p = 4Ce^{2x} + 4Ce^{2x} = 8Ce^{2x} = 4e^{2x}.$$

On a donc $C = \frac{1}{2}$.

3. Solution générale : $y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{1}{2}e^{2x}$.

Remarque. Il faut faire attention que la solution particulière soit bien linéairement indépendante des solutions de l'équation homogène. Si la solution particulière n'est pas linéaire indépendante, on peut la multiplier par x pour éliminer la dépendance linéaire. S'il y a encore dépendance linéaire, on multiplie par x , et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait indépendance linéaire.

Exemple 1.5.9. $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$.

1. Solution homogène : le polynôme associé est $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$. Les zéros sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$. Les solutions sont donc $y_1 = C_1 e^{2x}$ et $y_2 = C_2 e^{-x}$.
2. Solution particulière : selon la méthode, on chercherait $y_p = Ce^{2x}$, mais cette fonction est linéaire dépendante de y_1 . On prend plutôt $y_p = Cxe^{2x}$, qui est linéaire indépendante. On a

$$y_p' = Ce^{2x} + 2Cxe^{2x}$$

$$y_p'' = 4Ce^{2x} + 4Cxe^{2x}.$$

On obtient

$$y_p'' - y_p' - 2y_p = 4Ce^{2x} + 4Cxe^{2x} - Ce^{2x} - 2Cxe^{2x} - 2Cxe^{2x} = 3Ce^{2x} = 3e^{2x}.$$

On a donc $C = 1$. La solution particulière est $y_p = xe^{2x}$.

3. Solution générale : $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + xe^{2x}$.

Méthode de Lagrange

Voici une méthode plus générale que la méthode des coefficients indéterminés, mais plus calculatoire, pour trouver une solution particulière de $ay'' + by' + cy = r(x)$.

Remarque. Cette méthode fonctionne même si l'EDO n'est pas à coefficients constants (mais tout de même linéaire), mais il faut d'abord avoir trouvé les solutions de l'équation homogène.

Soit

$$y'' + ay' + by = r(x) \quad (E)$$

l'EDO. On suppose que le coefficient de y'' est 1, car sinon on peut diviser l'équation par son coefficient (qui est non nul, sinon l'EDO serait d'ordre 1). On cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x),$$

où y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène.

On dérive y_p

$$\begin{aligned} y'_p &= u'_1 y_1 + u_1 y'_1 + u'_2 y_2 + u_2 y'_2 \\ y''_p &= u''_1 y_1 + 2u'_1 y'_1 + u_1 y''_1 + u''_2 y_2 + 2u'_2 y'_2 + u_2 y''_2. \end{aligned}$$

On remplace dans (E)

$$\begin{aligned} &u''_1 y_1 + 2u'_1 y'_1 + u_1 y''_1 + u''_2 y_2 + 2u'_2 y'_2 + u_2 y''_2 \\ &\quad + a(u'_1 y_1 + u_1 y'_1 + u'_2 y_2 + u_2 y'_2) \\ &\quad + b(u_1 y_1 + u_2 y_2). \\ &= u_1 \underbrace{(y''_1 + ay'_1 + by_1)}_{=0} + u_2 \underbrace{(y''_2 + ay'_2 + by_2)}_{=0} \\ &\quad + u''_1 y_1 + 2u'_1 y'_1 + u''_2 y_2 + 2u'_2 y'_2 \\ &\quad + a(u'_1 y_1 + u'_2 y_2) = r(x). \end{aligned} \quad (*)$$

Comme on a une équation, mais deux inconnues (u_1 et u_2), on ajoute une condition pour simplifier la dernière équation. On impose donc

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0. \quad (C_1)$$

On dérive l'équation (C₁)

$$u''_1 y_1 + u'_1 y'_1 + u''_2 y_2 + u'_2 y'_2 = 0.$$

L'équation (*) se simplifie donc en

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = r(x). \quad (C_2)$$

Le problème s'est réduit à trouver u_1 et u_2 qui satisfont aux conditions (C_1) et (C_2) . Ceci se réécrit par

$$\begin{aligned} (C_1) & \begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_1' = r(x) \end{cases} \\ (C_2) & \\ \Rightarrow & \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

C'est donc un système linéaire de la forme $A\vec{X} = \vec{b}$. Si A est inversible, alors la solution est donnée par $\vec{X} = A^{-1}\vec{b}$. On voit que le déterminant de A correspond au Wronskien de y_1, y_2 . Par le corollaire corollaire 1.5.4, puisque y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes, on sait que $\det(A) \neq 0$ pour tout x . Il suit que A est inversible.

Enfin, on trouve

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$u_1' = \frac{-y_2(x)r(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \quad \text{et} \quad u_2' = \frac{y_1(x)r(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}.$$

On intègre pour trouver u_1 et u_2 . La solution particulière est alors $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$.

Exemple 1.5.10. $y'' - 2y' + y = 3e^x$. On a $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, donc les solutions de l'équation homogène sont $y_1 = e^x$ et $y_2 = xe^x$.

Pour la solution particulière, on pose $y_p = u_1 e^x + u_2 x e^x$. D'abord, on a

$$\begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = (x+1)e^{2x} - x e^{2x} = e^{2x}.$$

On a

$$u_1' = \frac{-x e^x \cdot 3e^x}{e^{2x}} = -3x,$$

donc on trouve $u_1 = -\frac{3}{2}x^2$. Ensuite, on a

$$u_2' = \frac{e^x \cdot 3e^x}{e^{2x}} = 3,$$

donc on trouve $u_2 = 3x$.

La solution particulière est $y_p = -\frac{3}{2}x^2 e^x + 3x x e^x = \frac{3}{2}x^2 e^x$.

Ceci conclut la section sur les équations du deuxième ordre. Les équations linéaires à coefficients non constants pourraient être étudiées, mais par soucis de temps, elles sont omises. Les autres types d'équations d'ordre deux dépassent le contenu du cours.

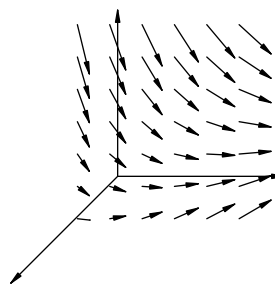
1.6. Champs de vecteurs et EDO

On a déjà vu un exemple de champ de vecteurs en parlant de la forme normale. On introduit formellement le concept.

Définition 1.6.1. Un *champ de vecteurs* sur \mathbb{R}^n est une fonction $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Il associe à chaque point de l'espace \mathbb{R}^n une direction et une « vitesse » (une longueur, sa norme).

Exemple 1.6.1. Vitesse du vent. Si on regarde la vitesse et la direction du vent à un instant donné, on obtient un champ de vecteurs

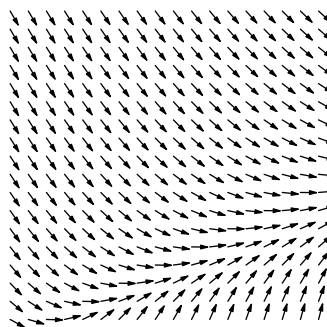
$$V(x, y, z) = \begin{pmatrix} V_1(x, y, z) \\ V_2(x, y, z) \\ V_3(x, y, z) \end{pmatrix}.$$



Exemple 1.6.2. Courants marins. On peut modéliser la direction des courants marins comme un champ de vecteurs. Si seule la direction est importante, on peut utiliser un champ de vecteurs dont tous les vecteurs ont la même longueur.

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \|f(x, y)\| = 1$$



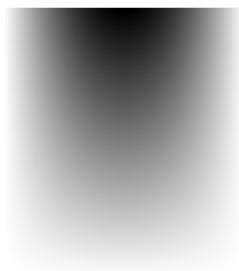
Remarque. Étant donné un champ de vecteurs \vec{v} , on peut définir un nouveau champ de vecteurs \vec{w} par

$$\vec{w}(\vec{x}) = \frac{\vec{v}(\vec{x})}{\|\vec{v}(\vec{x})\|},$$

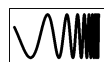
là où $\vec{v}(\vec{x}) \neq 0$. On dit que \vec{w} est *unitaire*, car on a $\|\vec{w}(\vec{x})\| = 1$ là où \vec{w} est défini.

Lorsque $m = 1$, on parle plutôt d'un *champ scalaire*. Il n'associe pas, dans ce cas, une direction, seulement une grandeur.

Exemple 1.6.3. Température. La température en chaque point à un instant donné donne un champ scalaire $T: (x, y) \mapsto T(x, y)$. Si on considère une plaque de métal carré et une source de chaleur situé en un point en haut de la frontière de la plaque, on pourrait obtenir champ scalaire comme celui-ci, à un moment donné pendant la diffusion de la chaleur.



Ici, par exemple, le gris plus foncé représente une température plus intense.



Remarque. La diffusion de la chaleur est décrite par l'équation de la chaleur. C'est une équation aux dérivées partielles, qui est un type d'équation beaucoup plus compliqué à résoudre que les EDO.

1.6.1 Lien entre les EDO et les champs de vecteurs

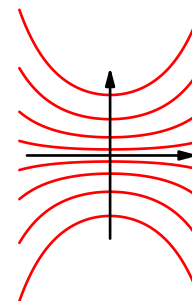
Commençons par un exemple pour illustrer le lien entre les EDO et les champs de vecteurs.

Exemple 1.6.4. Soit l'EDO $y' = -2xy$. La famille de solutions générales est donnée par $y(x) = Ce^{-x^2}$. On peut tracer le graphes des solutions dans le plan xy pour quelques valeurs de C , comme on le voit ci-contre.

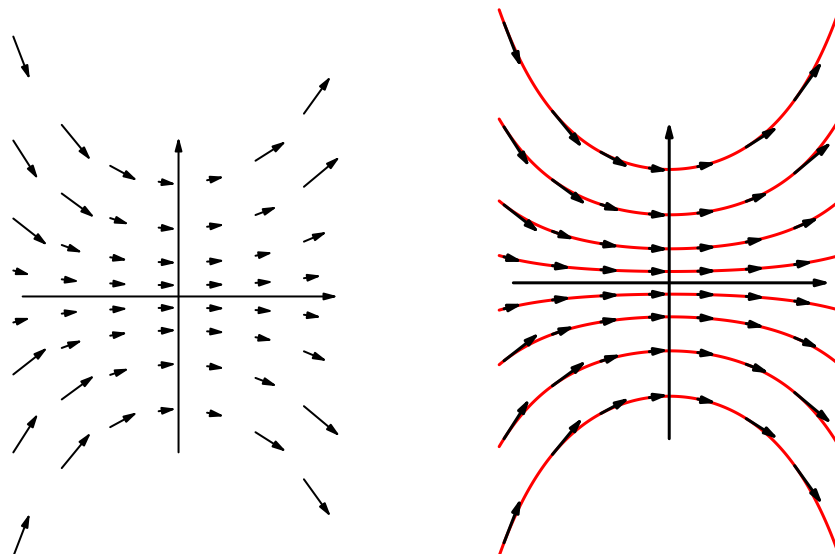
En tout point d'une solution, on peut tracer le vecteur tangent à la courbe

$$\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2xy \end{pmatrix}.$$

Ceci nous donne un champ de vecteurs. En fait, il est possible de tracer le champ de vecteurs sans connaître les solutions, car on a seulement



besoin de y' , qui est donnée par l'EDO. On obtient ceci.



- Une EDO donne un champ de vecteurs. On a déjà vu que d'une EDO d'ordre 1 sous forme normale $y' = f(x, y)$, on obtient un champ de vecteurs

$$V(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+f(x,y)^2}} \\ \frac{f(x,y)}{\sqrt{1+f(x,y)^2}} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad W(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}, \quad (*)$$

où V est unitaire. (On voit que V et W sont reliés par $V = W/\|W\|$.)

Pour une EDO d'ordre deux $y''(x) = f(x, y, y')$, on peut le réduire à un système d'ordre un en posant $u_0(x) = y(x)$ et $u_1(x) = y'(x)$ pour obtenir

$$\begin{cases} u_0'(x) = y'(x) = u_1(x) \\ u_1'(x) = y''(x) = f(x, y, y') = f(x, u_0, u_1) \end{cases} \quad \text{ou tout simplement} \quad \begin{cases} u_0 = u_1; \\ u_1' = f(x, u_0, u_1). \end{cases}$$

On pose

$$V(u_0, u_1) = \begin{pmatrix} u_0' \\ u_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ f(x, u_0, u_1) \end{pmatrix}$$

qui est un champ de vecteurs tangent aux solutions du système dans le plan (u_0, u_1) .

- Un champ de vecteurs donne une EDO. Si on a un champ de vecteurs

$$V(x, y) = \begin{pmatrix} V_1(x, y) \\ V_2(x, y) \end{pmatrix},$$

alors on obtient le système d'EDO d'ordre 1

$$(*) \begin{cases} x'(t) = V_1(x(t), y(t)); \\ y'(t) = V_2(x(t), y(t)). \end{cases}$$

- **Le lien entre les deux.** *Le champ de vecteurs est tangent aux solutions de l'EDO.* En effet, si on a la solution $(x(t), y(t))$ au système $(*)$, alors on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{V_2(x, y)}{V_1(x, y)},$$

donc la pente de la tangente et la pente du vecteur $V(x, y)$ sont égaux.

Exemple 1.6.5. Chute libre sans frottement. On considère un corps de masse m qui tombe sans frottement. Son déplacement est décrit par

$$x''(t) = -mg.$$

Pour réduire cette équation à un système d'ordre 1, on pose

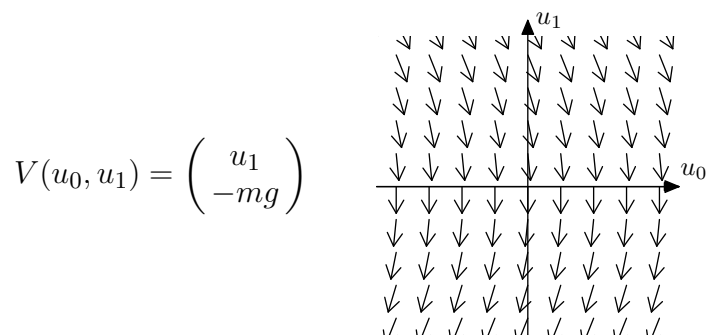
$$u_0(t) = x(t),$$

$$u_1(t) = x'(t).$$

On obtient le système

$$\begin{cases} u_0' = u_1; \\ u_1' = -mg. \end{cases}$$

Ceci donne le champ de vecteur



On peut résoudre le système en intégrant la première équation

$$u_1'(t) = -mg \Rightarrow u_1(t) = -mgt + C.$$

Ensuite, on remplace dans la seconde équation et on intègre

$$u_0'(t) = -mgt + C \Rightarrow u_0(t) = -\frac{1}{2}mgt^2 + Ct + D.$$

Ceci donne une courbe que l'on peut tracer dans le plan u_0u_1 et qui est tangente au champ de vecteurs.

Exemple 1.6.6. Chute libre avec frottement. On considère un corps de masse m qui tombe. Son déplacement est décrit par l'EDO non linéaire d'ordre 2

$$x''(t) = -mg + C(x'(t))^2, \quad (E)$$

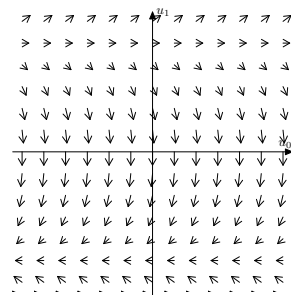
où C est une constante qui dépend de plusieurs facteurs, dont le forme du corps et la masse volumique du fluide.


Comme l'équation est non linéaire, les techniques de résolution vues jusqu'ici ne s'appliquent pas. Cependant, on peut réduire l'équation à un système d'ordre un. On pose

$$\begin{aligned} u_0(t) &= x(t), \\ u_1(t) &= x'(t). \end{aligned}$$

On obtient le système

$$\begin{cases} u_0'(t) = u_1(t) \\ u_1'(t) = -mg + C(u_1(t))^2. \end{cases}$$

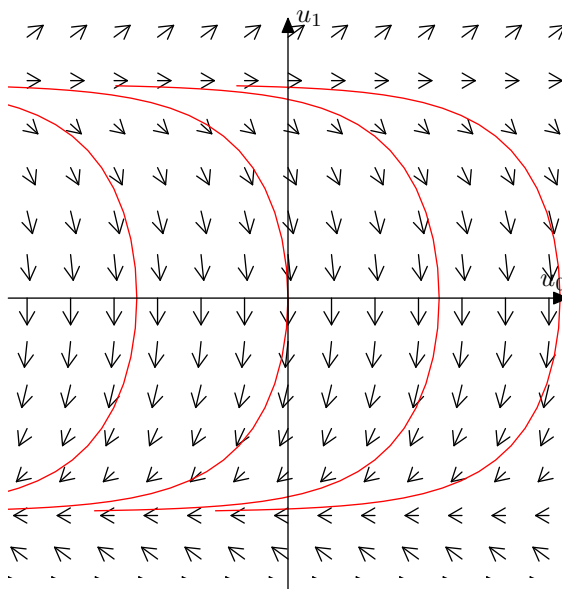


 *Remarque.* En fait, pour résoudre l'équation de départ (E), on applique le changement de variable $y = x'$ pour obtenir $y' = -mg + Cy^2$. Cette équation d'ordre un se résout avec un truc : on remarque que la fonction $z = \tanh(w)$ est la solution de l'EDO $z' = 1 - z^2$. Ainsi, on obtient

$$y(t) = \sqrt{\frac{mg}{C}} \tanh(-\sqrt{Cmg}t).$$

Ensuite, il faut résoudre $x'(t) = y(t)$ et on trouve

$$x(t) = -\frac{1}{C} \log(\cosh(\sqrt{Cmg}t)) + D.$$



1.6.2 Lignes de champ

Définition 1.6.2. On appelle *lignes de champ* d'un champ de vecteurs \vec{V} la famille de courbes qui sont en chaque point tangente au vecteur \vec{V} .

Exemple 1.6.7. Soit le champ de vecteurs

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

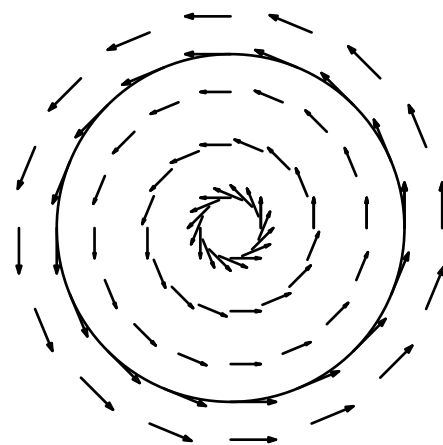
défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \vec{0}$. On montre que l'ensemble des cercles de rayon r centré à l'origine est une famille de courbes tangentes au champ de vecteurs.

Un tel cercle est paramétré par $f(t) = (r \cos t, r \sin t)^T$. On a

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \vec{v}(f(t)) &= \vec{v}(r \cos t, r \sin t) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{r \sin t}{\sqrt{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t}} \\ \frac{r \cos t}{\sqrt{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



On a donc $f'(t) = r\vec{v}(f(t))$.

Étudier les lignes de champs est une façon d'étudier les systèmes d'EDO. Bien qu'il y ait énormément à en dire sur ce sujet, continuer cette discussion nous éloigne quelque peu du cadre du cours. On termine donc cette section sur la définition et la proposition suivante.

Définition 1.6.3. Soit le champ de vecteurs \vec{v} sur \mathbb{R}^n et soit $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle h une *intégrale première* du système d'EDO associé à \vec{v} si les surfaces de niveau de h sont tangentes au champ de vecteurs.

Supposons que h soit de classe C^1 . On rappelle les surfaces de niveau d'un premier cours de calcul de fonctions de plusieurs variables.

Définition 1.6.4. Les *surfaces de niveau* de h sont les ensembles

$$S_D = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid h(x_1, \dots, x_n) = D\},$$

où $D \in \mathbb{R}$ est une constante. Lorsque $n = 2$, on les appelle *courbes de niveau*.

Propriété d'une courbe de niveau. Si C est la courbe de niveau définie par $h(x, y) = D$, alors le gradient de h pointe dans la direction perpendiculaire à C .

Démonstration. Soit γ un paramétrage de C . Par définition d'une courbe de niveau, on a $h(\gamma(t)) = D$ pour tout t . En utilisant la dérivation en chaîne, on obtient

$$\nabla h(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0.$$

□

Voici un heuristique de cette propriété pour s'en convaincre : rappelons que le gradient pointe dans la direction de plus forte variation. Or, h n'a aucune variation dans la direction suivant la surface de niveau, donc il pointe « dans une direction opposée. »

Corollaire 1.6.5. Les courbes de niveau de h sont tangentes au champ de vecteurs \vec{v} si et seulement si $\nabla h \cdot \vec{v} = 0$.

Proposition 1.6.6. Soit \vec{v} un champ de vecteurs de \mathbb{R}^2 continue et soit le système d'EDO associé

$$\begin{cases} x' = v_1; \\ y' = v_2. \end{cases}$$

Soit $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On a l'équivalence

$$h \text{ est une intégrale première} \iff \frac{dy}{dx} = -\frac{h_x}{h_y} \text{ ou } \frac{dx}{dy} = -\frac{h_y}{h_x} \text{ lorsque } \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Démonstration. \Rightarrow) Puisque h est une intégrale première, on a $\nabla h \cdot \vec{v} = 0$, c'est-à-dire $h_x x' + h_y y' = 0$. On exprime t implicitement en fonction de x , de sorte que l'on obtienne

$$\frac{d}{dx} y(t(x)) = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{y'}{x'}.$$

Puisque $\vec{v} \neq \vec{0}$, on a $x' \neq 0$ ou $y' \neq 0$. Dans le premier cas, on peut écrire $\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx} = -\frac{h_x}{h_y}$.

Dans le second cas, on a $\frac{x'}{y'} = \frac{dx}{dy} = -\frac{h_y}{h_x}$.

\Leftarrow) Pour la réciproque, l'hypothèse nous donne $h_x x' + h_y y' = 0$, c'est-à-dire $\nabla h \cdot \vec{v} = 0$. On conclut que h est une intégrale première par le corollaire 1.6.5.

□

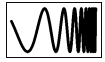
Exemple 1.6.8. Soit le champ de vecteurs $\vec{v} = (4x, 6y)^T$. On cherche à décrire les lignes de champ. On a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6y}{4x} = \frac{3y}{2x}.$$

On résout par séparation de variable :

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{dy}{y} &= 3 \int \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow 2 \log |y| &= 3 \log |x| + C \\ \Rightarrow y^2 &= \pm K x^3 \\ \Rightarrow y^2 &= C_1 x^3 \quad C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

L'intégrale première est donc $h(x, y) = \frac{y^2}{x^3}$ lorsque $x \neq 0$, ou sinon $g(x, y) = \frac{x^3}{y^2}$ lorsque $y \neq 0$.

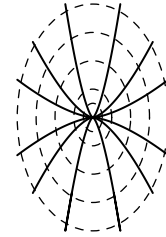


Si l'on résout le système

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y},$$

alors on obtient les courbes de niveau orthogonales. En effet, la droite ayant $-\frac{1}{m}$ comme pente est orthogonale à la droite de pente m .

On le résout de la même façon pour trouver $\frac{3}{2}y^2 = -x^2 + C$. Ainsi, les courbes orthogonales au lignes de champ sont des ellipses. Sur la figure ci-contre, on voit les ellipses en pointillées orthogonales aux lignes de champ. On rappelle que les lignes de champ sont tangentes au champ de vecteurs.



Deuxième partie
Analyse vectorielle

2.1. Opérations sur les champs de vecteurs

Pour faire suite à la section sur les champs de vecteurs de la partie précédente, on parle dès maintenant des opérations sur les champs de vecteurs plutôt que de les repousser au moment des intégrales de flux. Ces opérations joueront un rôle central dans les théorèmes fondamentaux de l'intégration. Elles permettront de généraliser le théorème fondamental du calcul de différentes façons.

2.1.1 Rotationnel et divergence

On rappelle ici le produit scalaire et le produit vectoriel et on introduit la divergence et le rotationnel. D'abord, rappelons qu'un champ de vecteurs de \mathbb{R}^n est une fonction $\vec{v}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Pour le reste du cours, on se concentrera sur deux types de champs de vecteurs

$\vec{v}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$: les champs de vecteurs du plan,

$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$: les champs de vecteurs de l'espace.

Le produit scalaire. Le produit scalaire entre deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} de \mathbb{R}^n est défini par

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \sum_{j=1}^n v_j w_j.$$

Dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , ceci donne respectivement

$$(\mathbb{R}^2) : \vec{v} \bullet \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2,$$

$$(\mathbb{R}^3) : \vec{v} \bullet \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

La *norme* d'un vecteur est

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}}.$$

On a la formule

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta,$$

où θ est l'angle entre les vecteurs \vec{v} et \vec{w} .

Enfin, notons que l'on obtient la composante de \vec{v} dans la direction \vec{w} à l'aide du produit scalaire. Plus précisément, on a

$$\text{Composante de } \vec{v} \text{ dans la direction } \vec{w} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \|\vec{v}\| \cos \theta.$$

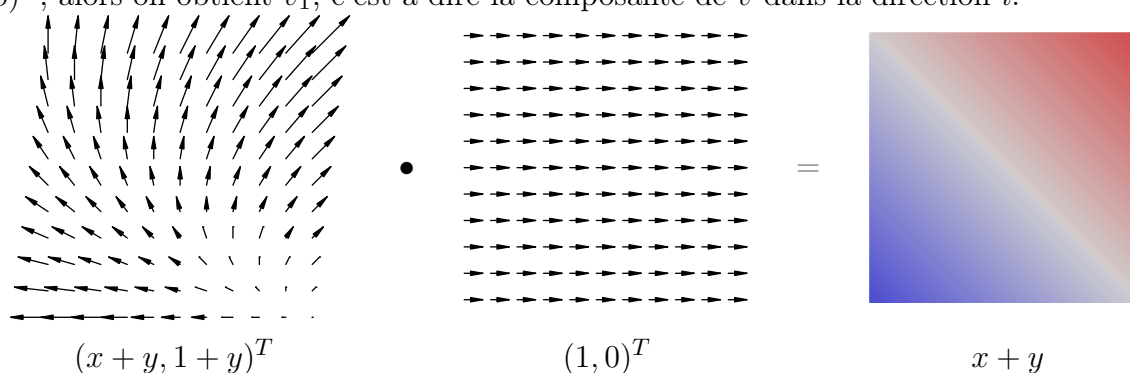
Le produit scalaire $\vec{v} \bullet \vec{w}$ est donc la composante de \vec{v} dans la direction \vec{w} pondérée par $\|\vec{w}\|$.

Lorsqu'on a deux champs de vecteurs $\vec{v}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\vec{w}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, alors on peut définir une *champ scalaire* par

$$f(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x}) \bullet \vec{w}(\vec{x}).$$

Ici, f est une fonction de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemple 2.1.1. Si on prend le produit scalaire d'un champ de vecteur $\vec{v}(\vec{x})$ avec le champ $(1, 0)^T$, alors on obtient v_1 , c'est-à-dire la composante de \vec{v} dans la direction \vec{i} .



Ici, un bleu intense représente une valeur très négative, un rouge intense, une valeur très positive et du blanc, une petite valeur.

La divergence. On considère un champ scalaire $\vec{v}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. On définit la *divergence* de \vec{v} par

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}.$$

On le note aussi $\nabla \cdot \vec{v}$, pour évoquer que l'on prend le « produit » entre $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$.

Dans le plan et l'espace, on a respectivement

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^2) : \quad \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \\ (\mathbb{R}^3) : \quad \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

La divergence définit une fonction de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Elle associe en chaque point la tendance du champ à se « disperser ». Ceci prendra un sens plus clair à la section 2.4.4.

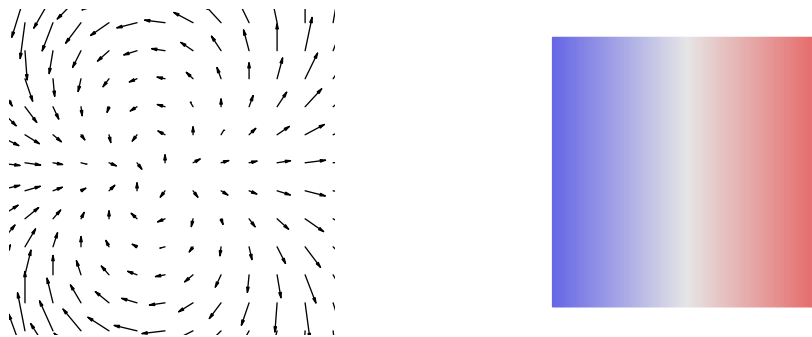
Exemple 2.1.2. On considère le champ de vecteurs du plan

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

Ça divergence est

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 2x + 2x = 4x.$$

Voici ce que l'on obtient graphiquement.



On voit à gauche le champ de vecteurs \vec{v} et à droite le champ scalaire $\text{div } \vec{v}$.

Remarquons qu'à l'origine, la divergence est nulle puisqu'il y a « autant de vecteurs qui se dirigent vers $\vec{0}$ » qu'il y en a qui « s'éloignent » de $\vec{0}$.

Le produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 . Le produit vectoriel est seulement défini dans l'espace. On considère deux champs de vecteurs $\vec{v}, \vec{w}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. On définit leur produit vectoriel par

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & v_1 & w_1 \\ j & v_2 & w_2 \\ k & v_3 & w_3 \end{vmatrix} := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ -v_1 w_3 + v_3 w_1 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

Ceci donne un nouveau champ de vecteurs. Remarquez que contrairement au produit scalaire et à la divergence, le produit vectoriel donne **un champ de vecteurs et non un champ scalaire**.

Le vecteur $\vec{v}(\vec{x}) \times \vec{w}(\vec{x})$ est *perpendiculaire* aux vecteurs $\vec{v}(\vec{x})$ et $\vec{w}(\vec{x})$ et sa longueur *représente l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{v}(\vec{x})$ et $\vec{w}(\vec{x})$* . Ceci veut dire que l'on a les relations suivantes

$$\begin{aligned} (\vec{v} \times \vec{w}) \bullet \vec{v} &= 0, \\ (\vec{v} \times \vec{w}) \bullet \vec{w} &= 0, \\ \|\vec{v} \times \vec{w}\| &= \text{Aire} \left(\begin{array}{c} \vec{v} \\ \vec{w} \end{array} \right). \end{aligned}$$

De plus, si $\vec{u}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un autre champ de vecteurs, alors on a la formule générale

$$\vec{v} \times \vec{w} \bullet \vec{u} = \det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

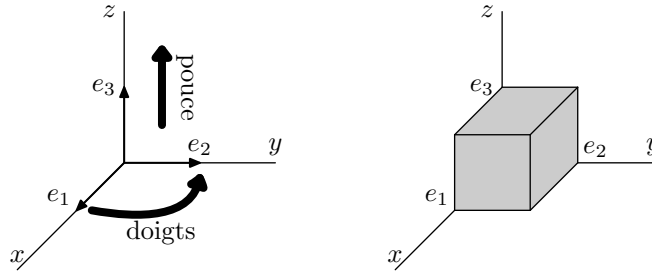
Ceci correspond au *volume (signé) du parallépipède* engendré par \vec{v} , \vec{w} et \vec{u} . (Le signe du volume est déterminé par la règle de la main droite : on point le pouce de la main droite vers u , lorsque l'on plie les doigts la même main, s'ils vont de \vec{v} vers \vec{w} , alors le volume est positif, sinon il est négatif.)

Exemple 2.1.3. Soit e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3 . Alors on a

$$e_1 \times e_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$e_1 \times e_2 \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$



Le rotationnel. Le rotationnel aussi n'est défini que dans l'espace. On le définit « à partir du produit vectoriel » comme suit

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ -\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le rotationnel mesure la tendance du champ de vecteur à tourbillonner. La direction du vecteur donne la direction de l'axe de rotation et la norme donne l'intensité de la rotation. Ceci sera rendu plus clair à la section 2.4.3.

2.1.2 Propriétés des opérations

On énonce ici quelques propriétés du rotationnel et de la divergence.

Rappelons que le gradient d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donne un champ de vecteurs : $\nabla f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Proposition 2.1.1. Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 , alors

$$\text{rot}(\nabla f) = \vec{0}.$$

Démonstration. On fait le calcul directement. On a le champ de vecteur

$$\nabla f = (f_x \quad f_y \quad f_z),$$

où f_x , f_y et f_z sont les dérivées partielles de f par rapport à x , y et z respectivement. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\nabla f) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{zy} - f_{yz} \\ -f_{zx} + f_{xz} \\ f_{zy} - f_{yz} \end{pmatrix} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

□

Remarque. On verra que la question inverse est intéressante, à savoir si $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$, alors existe-t-il une fonction f telle que $\vec{v} = \nabla f$? De tels champs de vecteurs sont dits *conservatifs*. La proposition précédente est donc une condition nécessaire pour qu'un champ soit conservatif, mais **elle n'est pas suffisante**.

Proposition 2.1.2. Si $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs de classe C^2 , alors

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0.$$

Démonstration. D'abord, on a

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ -\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix},$$

donc il suit que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial y} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

2.2. Courbes et surfaces dans \mathbb{R}^n

Dans la section rappel, on définit les fonctions de classe C^k dont le domaine est \mathbb{R}^n (ou un ouvert). On étend cette notion aux fonctions définies sur un intervalle compact.


Définition 2.2.1. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé et borné (compact). Soit $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $g'(t)$ existe pour tout $t \in (a, b)$. On dira que g est de *classe C^1* si g' est continue et si g' s'étend en une fonction continue sur $[a, b]$, c'est-à-dire que les limites

$$\lim_{t \rightarrow a^+} g'(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow b^-} g'(t)$$

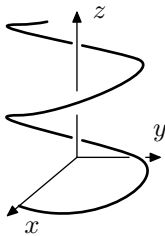
existent. La fonction g est de *classe C^k* si g' est de classe C^{k-1} .

On peut maintenant définir ce qu'est une *courbe*.

Définition 2.2.2. On appelle une *courbe de classe C^k* dans \mathbb{R}^n une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$ dont les n composantes $f_j: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^k .

 *Remarque.* Certains auteurs penseront plutôt à une courbe comme étant le graphe tracé par la fonction et appelleront la fonction un *paramétrage*. En effet, la plupart du temps, on ne prendra pas la peine de distinguer la fonction et son graphe. Par contre, dans le contexte du cours, lorsque la rigueur est de mise, une courbe sera la fonction et non son image.

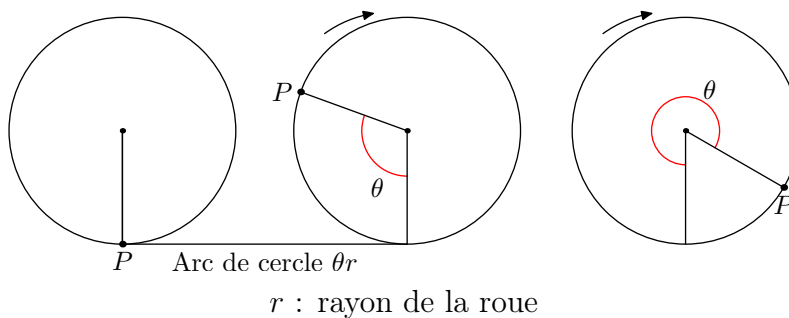
Exemple 2.2.1. Mouvement d'un corps dans \mathbb{R}^3 .



$$\begin{cases} x = x(t) = \cos t \\ y = y(t) = \sin t \\ z = z(t) = t \end{cases} \quad (t : \text{paramètre dans } [a, b])$$

Ceci est le système des équations paramétriques de la trajectoire.

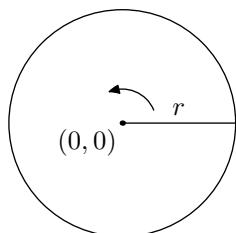
Exemple 2.2.2. Paramétrer la position d'un point P sur une roue.



Au début, le point P est à l'origine. On paramétrise P en fonction de l'angle θ comme sur la figure.

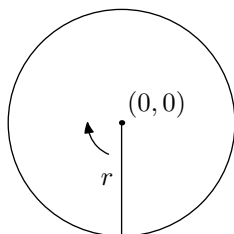
Observation Le centre du cercle bouge en fonction de θ . En fait, le centre varie suivant $\begin{pmatrix} r\theta \\ r \end{pmatrix}$.

On connaît le paramétrage d'un cercle



$$\begin{aligned} x(\theta) &= r \cos \theta, \\ y(\theta) &= r \sin \theta. \end{aligned}$$

Ainsi, on a



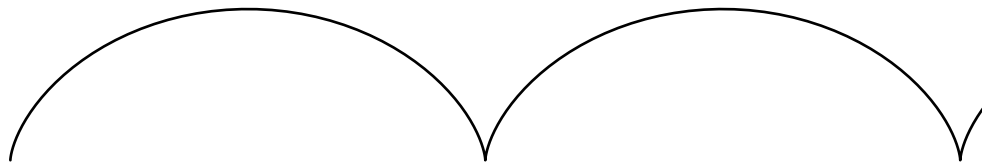
$$\begin{aligned} x(\theta) &= r \cos(-\theta - \frac{\pi}{2}), \\ y(\theta) &= r \sin(-\theta - \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

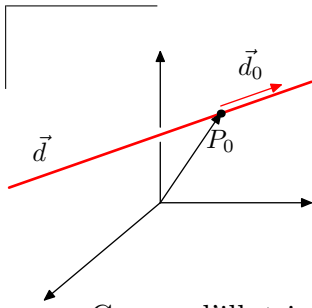
On combine le déplacement d'un point autour de l'origine avec le déplacement du centre de la roue pour obtenir

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} r \cos(-\theta - \frac{\pi}{2}) \\ r \sin(-\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\theta \\ r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ -r \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\theta \\ r \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cette équation est le paramétrage de P . La paramètre est θ ; il varie dans $[0, +\infty)$.

Voici la trajectoire que l'on obtient pour $\theta \in [0, 4\pi + \delta]$:





Exemple 2.2.3. Droite dans l'espace. Une droite \vec{d} est déterminée par un point P_0 et une direction \vec{d}_0 . C'est l'ensemble des points $\{P_0 + t\vec{d}_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$. Un paramétrage s'obtient par

$$\varphi(t) = P_0 + t\vec{d}_0.$$

Comme l'illustre ces exemples, le paramétrage peut s'écrire de deux façons : sous forme vectorielle ou sous forme de système d'équations, soit respectivement

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_1 = f_1(t), \\ x_2 = f_2(t), \\ \vdots \\ x_n = f_n(t). \end{cases}$$

Elles seront considérées comme équivalentes.

On introduit un peu de terminologie. On considère une courbe $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k .

Définition 2.2.3. La *trajectoire* de f est son image $f([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Définition 2.2.4. Si $f(a) = f(b)$, alors la courbe est dite *fermée*.

Définition 2.2.5. Si f est injective sur $[a, b]$ et sur $(a, b]$, la courbe est dite *simple*. Autrement dit, la courbe est simple si elle ne s'intersecte pas elle-même (sauf peut-être aux extrémités).

Définition 2.2.6. Une courbe fermée et simple est appelée une *courbe de Jordan*.

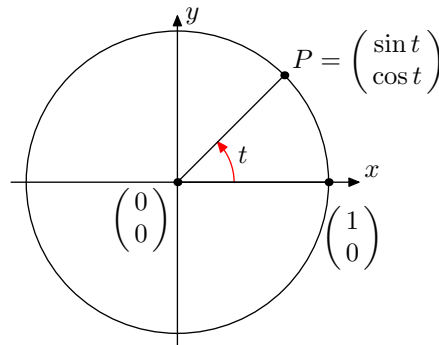
Exemple 2.2.4.

Soit les deux courbes suivantes :

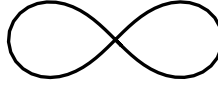
1. $f(t) = (\cos t, \sin t)^T, t \in [0, 2\pi]$;
2. $g(t) = (\cos t, \sin t)^T, t \in [0, 4\pi]$.

Leur trajectoire est le cercle de rayon 1 dans \mathbb{R}^2 pour toutes les deux. Elles sont toutes les deux des courbes fermées, puisque $f(0) = f(2\pi)$ et $g(0) = g(4\pi)$.

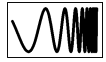
La courbe f est simple, donc également une courbe de Jordan, mais la courbe g n'est pas simple, car $g(\pi) = g(3\pi)$. (La courbe g trace deux fois le cercle.)



Exemple 2.2.5. Lemniscate de Bernoulli. La courbe paramétrée par

$$\varphi(\theta) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{\sin \theta}{1 + \cos^2 \theta} \\ \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \cos^2 \theta} \end{pmatrix}$$


avec $-\pi \leq \theta \leq \pi$, s'appelle une *lemniscate de Bernoulli*. Ce n'est **pas** une courbe simple, comme on peut le voir dans sa trajectoire dessinée ci-haut. En effet, on voit que $\varphi(0) = \varphi(\pi)$. Par contre, c'est une courbe fermée.



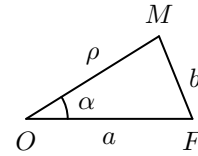
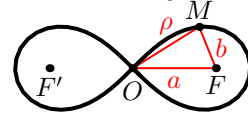
Les lemniscates forment une famille de courbes définie comme étant le lieu géométrique des points M tels que

$$\|\overrightarrow{MF}\| \cdot \|\overrightarrow{MF'}\| = \|\overrightarrow{OF}\|^2,$$

où F et F' sont deux foyers et O est le centre.

Pour trouver le paramétrage, on pose

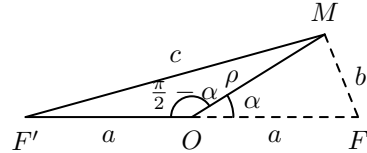
$$\begin{aligned} \vec{v} &= \overrightarrow{OM}, & \rho &= \|\vec{v}\|, \\ \vec{w} &= \overrightarrow{OF}, & a &= \|\vec{w}\|, \\ \vec{v} - \vec{w} &= \overrightarrow{FM}, & b &= \|\vec{v} - \vec{w}\|. \end{aligned}$$



et on définit α comme l'angle $\angle FOM$.

On utilise la relation $b^2 = (\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w})$, ce qui donne $b^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w}$. Cette dernière se réécrit $b^2 = \rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos \alpha$.

On pose $c = \|\overrightarrow{MF'}\|$. Le même argument que ci-haut nous donne la relation $c^2 = \rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos(\pi - \alpha)$. On combine nos équations; on cherche à avoir $b^2 c^2 = a^4$, ce qui donne $(\rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos \alpha)(\rho^2 + a^2 + 2\rho a \cos \alpha) = a^4$. Ceci se simplifie en $\rho^2[\rho^2 - 2a^2(2\cos^2 \alpha - 1)] = 0$.



On obtient $\rho^2 = 2a^2(2\cos^2 \alpha - 1)$. En utilisant l'identité $2\cos^2 \alpha - 1 = \cos(2\alpha)$, on a l'équation sous forme polaire $|\rho| = \sqrt{2}a\sqrt{\cos(2\alpha)}$. Puisqu'il y a une valeur absolue du côté gauche, on restreint α de sorte que $\cos(2\alpha)$ soit positif. On a donc $\alpha \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$. Le paramétrage est

$$\eta(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \sqrt{2}a \sqrt{\cos(2\alpha)} \\ \sin \alpha \sqrt{2}a \sqrt{\cos(2\alpha)} \end{pmatrix}.$$



Enfin, pour obtenir le paramétrage mentionné au début de l'exemple, on définit implicitement la variable θ par

$$\begin{cases} \cos \theta = \tan \alpha, \\ \sin \theta \geq 0, \end{cases} \quad \text{si } \alpha \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos \theta = \tan \alpha, \\ \sin \theta \leq 0, \end{cases} \quad \text{si } \alpha \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}].$$

et on utilise les identités

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}, \quad \sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad \text{et} \quad \cos(2\alpha) = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}.$$

Ici, θ varie entre $-\pi$ et π . Les détails sont laissés au lecteur.

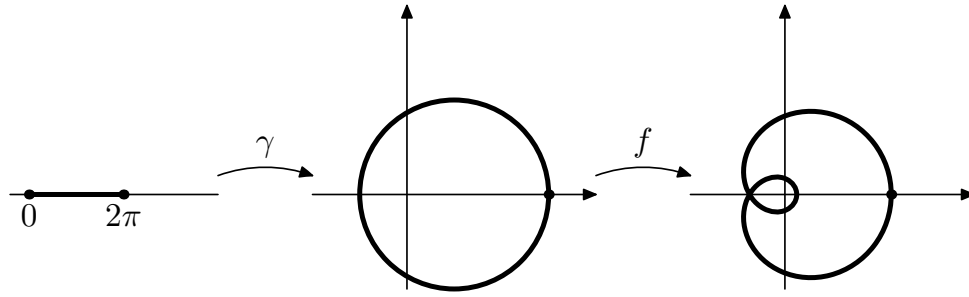
Exemple 2.2.6. Image d'une courbe. Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe et soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. La composée $f \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une nouvelle courbe.

Par exemple, on prend $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta + \frac{1}{4} \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

On considère $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$. La nouvelle courbe, image de f , est

$$f \circ \gamma(\theta) = f\left(\cos \theta + \frac{1}{4}, \sin \theta\right) = \begin{pmatrix} \left(\cos \theta + \frac{1}{4}\right)^2 - \sin^2 \theta \\ 2 \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix}.$$



Une partie plus difficile est de trouver un paramétrage lorsque la trace d'une courbe est donnée. Ce problème sera discuté la section 2.2.4.

2.2.1 Dérivée et vecteur tangent

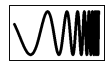
On définit la dérivée d'une courbe $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ par le quotient différentiel usuel. Pour ce faire, on définit d'abord une notion de limite dans \mathbb{R}^n .

Définition 2.2.7. Soit $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ une suite, où $a_m = (a_{m,1}, \dots, a_{m,n})^T$. On dit que la suite converge vers $a = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, noté

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = a,$$

si $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{m,j} = a_j$ pour $j = 1, \dots, n$. On note la convergence également par $a_m \rightarrow a$ lorsque $m \rightarrow \infty$.

Deux points dans l'espace sont proches si chaque composante du premier est proche de la composante respective du second; c'est pour cette raison que la convergence de la limite est définie ainsi.



Remarque. La définition donnée ci-haut s'énonce de façon équivalente avec les « ε, δ » comme suit : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que

$$m > N \Rightarrow \|a_m - a\| < \varepsilon.$$

Les « ε, δ » ne seront pas utilisés dans le contexte de ce cours.



Exercice. Montrer que ces deux définitions de convergence sont équivalentes.

Définition 2.2.8. La *dérivée* de f au temps t est donnée par

$$f'(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

lorsque la limite existe.

Si $f(t)$ est le vecteur $(f_1(t), \dots, f_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$, la dérivée $f'(t)$ existe si et seulement la dérivée existe pour les n composantes :

$$f'(t) = \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ \vdots \\ f'_n(t) \end{pmatrix}.$$

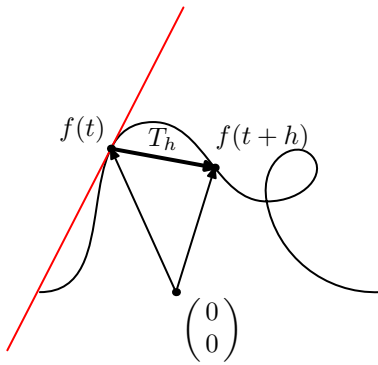
Exercice 4. Montrer cette propriété de la dérivée.

Exemple 2.2.7. On rappelle que $f(t) = (\cos t, \sin t)^T$ paramétrise un cercle de rayon un. La dérivée est donnée par

$$f'(t) = \begin{pmatrix} \cos' t \\ \sin' t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

La dérivée est un vecteur de \mathbb{R}^n . On discute de son interprétation géométrique. Soit $h > 0$ petit et fixé. Le vecteur

$$T_h := f(t+h) - f(t)$$

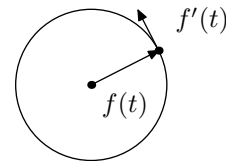


est le vecteur sur la figure ci-contre. C'est le vecteur allant de $f(t)$ vers $f(t+h)$. Lorsque h tend vers 0, T_h tend vers $\vec{0}$, mais on voit que plus h est petit, plus T_h s'approche de la tangente à la courbe. Lorsque $f'(t)$ existe et est non nul, on l'appelle le *vecteur tangent*, car sa *direction* est la même que la tangente. La *norme* (ou la longueur du vecteur) représente une « vitesse » de parcours. Le sens du vecteur donne le sens du parcours de la courbe.

Définition 2.2.9. 1. Lorsque $f'(t)$ existe et est non nul, on l'appelle le *vecteur tangent* à la courbe en $f(t)$. Si $f'(t) = 0$ ou si $f'(t)$ n'existe pas, alors on dit que la courbe n'a pas de vecteur tangent en $f(t)$.

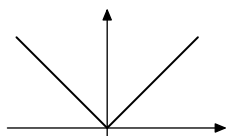
2. Le point $f(t)$ est dit *régulier* si $f'(t)$ existe et est non nul. Si tous les points de la courbe sont réguliers, on dit que f est *régulière*.

Exemple 2.2.8. On revient au paramétrage du cercle $f(t) = (\cos t, \sin t)^T$ et sa dérivée $f'(t) = (-\sin t, \cos t)^T$. On voit que $f'(t)$ est non nul pour tout t , donc le cercle possède un vecteur tangent en tout point, comme on le voit sur la figure. C'est une courbe régulière.

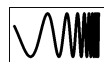
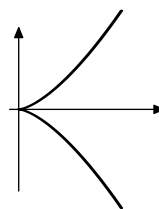


Exemple 2.2.9. Courbes sans vecteur tangent en un point.

Soit $f(t) = (t, |t|)^T$. Cette courbe n'a pas de vecteur tangent en $t = 0$, car $f_2(t) = |t|$ n'est pas dérivable. La trajectoire possède un coin.

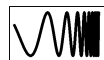


Soit $g(t) = (t^2, t^3)^T$. Cette courbe n'a pas de vecteur tangent en $t = 0$, car la dérivée en $t = 0$ est le vecteur nul. La trajectoire possède un point de rebroussement.



Il y a également des exemples artificiels. Par exemple, la courbe $\varphi(t) = (t^3, t^3)$ n'a pas de vecteur tangent en $\varphi(0) = (0, 0)$, mais sa trajectoire est tout simplement la droite $y = x$, qui n'a évidemment aucun coin ou point de rebroussement.

Remarque. Une courbe régulière est parfois appelée *lisse*, car une courbe régulière n'a ni coin, ni point rebroussement, elle semble « parfaite » en tout point. Notez par contre que certains auteurs utilisent le terme « lisse » comme un synonyme pour « de classe C^∞ ».



Un point qui n'est pas régulier est appelé *point critique*. Leur étude est très importante pour la compréhension des structures géométriques abstraites, mais dépasse le contenu du cours.

Propriétés de la dérivation de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

1. $(f(t) + g(t))' = f'(t) + g'(t)$;

2. Règles de Leibniz :

2.1 Pour $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable, on a $(a(t)f(t))' = a'(t)f(t) + a(t)f'(t)$;

2.2 $(f(t) \bullet g(t))' = f'(t) \bullet g(t) + f(t) \bullet g'(t)$, où \bullet est le produit scalaire;

2.3 Pour $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, on a $(f(t) \times g(t))' = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t)$, où \times est le produit vectoriel;

3. *Dérivation en chaîne :*

3.1 Si $a: \mathbb{R} \rightarrow [a, b]$, alors $(f \circ a)'(t) = f'(a(t))a'(t)$.

3.2 Si $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, alors $(A \circ f)'(t) = \text{Jac}_{f(t)}(A)f'(t)$, où ici on fait le produit matriciel entre $\text{Jac}_{f(t)}(A)$ qui est de dimensions $m \times n$ et $f'(t)$ qui est de dimension $n \times 1$;

3.3 En particulier, si $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, alors $(A \circ f)'(t) = \nabla A(f(t)) \cdot f'(t)$.

Démonstration. Posons $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ et $g = (g_1, \dots, g_n)^T$.

1. On fait le calcul composante par composante :

$$\begin{aligned} (f(t) + g(t))' &= \begin{pmatrix} f_1(t) + g_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) + g_n(t) \end{pmatrix}' \\ &= \begin{pmatrix} f_1'(t) + g_1'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) + g_n'(t) \end{pmatrix} \\ &= f'(t) + g'(t). \end{aligned}$$

2.1 Même démarche qu'au point 1.

2.2 On laisse tomber le t pour alléger l'écriture. D'une part on a

$$\begin{aligned} (f \bullet g)' &= \left(\sum_{i=1}^n f_i g_i \right)' \\ &= \sum_{i=1}^n (f_i' g_i + f_i g_i') \end{aligned}$$

et d'autre part, on a

$$f' \bullet g + f \bullet g' = \sum_{i=1}^n f_i' g_i + \sum_{i=1}^n f_i g_i'.$$

On constate qu'il y a bien égalité.

2.3 D'une part, on a

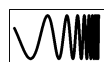
$$\begin{aligned} (f \times g)' &= \begin{pmatrix} f_2 g_3 - f_3 g_2 \\ -f_1 g_3 + f_3 g_1 \\ f_1 g_2 - f_2 g_1 \end{pmatrix}' \\ &= \begin{pmatrix} f_2' g_3 + f_2 g_3' - f_3' g_2 - f_3 g_2' \\ -f_1' g_3 - f_1 g_3' + f_3' g_1 + f_3 g_1' \\ f_1' g_2 + f_1 g_2' - f_2' g_1 - f_2 g_1' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} f' \times g + f \times g' &= \begin{pmatrix} f'_2 g_3 - f'_3 g_2 \\ -f'_1 g_3 + f'_3 g_1 \\ f'_1 g_2 - f'_2 g_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_2 g'_3 - f_3 g'_2 \\ -f_1 g'_3 + f_3 g'_1 \\ f_1 g'_2 - f_2 g'_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f'_2 g_3 - f'_3 g_2 + f_2 g'_3 - f_3 g'_2 \\ -f'_1 g_3 + f'_3 g_1 - f_1 g'_3 + f_3 g'_1 \\ f'_1 g_2 - f'_2 g_1 + f_1 g'_2 - f_2 g'_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On constate qu'il y a bien égalité.

3.1 Même démarche qu'au point 1.



3.2. On pose $L_{\vec{x}} = dA(\vec{x})$ la jacobienne de A au point \vec{x} . Par définition de la dérivée au point \vec{x} , on a

$$A(\vec{y}) - A(\vec{x}) = L_{\vec{x}}(\vec{y} - \vec{x}) + R(\vec{y} - \vec{x}),$$

et

$$f(t+h) - f(t) = f'(t)h + R'(h),$$

où $\|R(\vec{y} - \vec{x})\|/\|\vec{y} - \vec{x}\| \rightarrow 0$ lorsque $\vec{y} - \vec{x} \rightarrow \vec{0}$ et $\|R'(h)\|/|h| \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$.

On remplace par $\vec{y} = f(t+h)$ et $\vec{x} = f(t)$

$$\begin{aligned} A(f(t+h)) - A(f(t)) &= L_{f(t)}(f(t+h) - f(t)) + R(f(t+h) - f(t)) \\ &= L_{f(t)}(f'(t)h + R'(h)) + R(f(t+h) - f(t)) \\ &= L_{f(t)}(f'(t)h) + L(R'(h)) + R(f(t+h) - f(t)) \\ &= \left(L_{f(t)} \circ (f'(t)) \right) h + \underbrace{[L_{f(t)}(R'(h)) + R(f(t+h) - f(t))]}_{:=M(h)} \end{aligned}$$

Ici $L_{f(t)} \circ (f'(t))$ est une application linéaire. Il suffit de montrer que M est un $o(h)$ pour conclure que $L_{f(t)} \circ (f'(t))$ est la dérivée de $A \circ f$ au point t .

Puisque $L_{f(t)}$ est linéaire, il suit que $L_{f(t)}(R'(h))$ est un $o(h)$. Pour l'autre partie, on a

$$\frac{R(f(t+h) - f(t))}{h} = \underbrace{\left(\frac{R(f(t+h) - f(t))}{f(t+h) - f(t)} \right)}_{\rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right)}_{\rightarrow f'(t)}$$

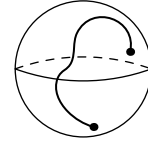
lorsque $h \rightarrow 0$, donc $R(f(t+h) - f(t))$ est un $o(h)$.

3.3 Enfin, on a que $L_{f(t)} \circ (f'(t)) = \nabla A(f(t)) \cdot f'(t)$, car $L_{\vec{x}} = \nabla A(\vec{x})$, donc le produit de matrices donne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial A}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ \vdots \\ f'_n(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial A}{\partial x_1} f'_1(t) + \cdots + \frac{\partial A}{\partial x_n} f'_n(t).$$

□

Exemple 2.2.10. Courbe sur la surface d'une sphère. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe telle que $\|f(t)\| = C$ pour tout $t \in [a, b]$, où $C \in (0, \infty)$ est une constante. Ici $\|v\|$ désigne la norme d'un vecteur v dans \mathbb{R}^n . Alors $f(t)$ et $f'(t)$ sont perpendiculaires pour tout t .



Démonstration D'abord, on a $\|f(t)\|^2 = f_1(t)^2 + \dots + f_n(t)^2 = f(t) \bullet f(t) = C^2$ pour tout t . En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(t) \bullet f(t)) &= \frac{d}{dt}C^2 = 0 \\ &= f'(t) \bullet f(t) + f(t) \bullet f'(t). \end{aligned}$$

On voit que $2f'(t) \bullet f(t) = 0$, d'où $f(t)$ et $f'(t)$ sont perpendiculaires.

2.2.2 Intégrale de courbe

Il y a plusieurs types d'intégrales à étudier. En voici une première qui sera utile sous peu.

Définition 2.2.10. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe continue. On définit l'intégrale de courbe de f par

$$\int_a^b f(t) dt := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t) dt \\ \int_a^b f_2(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t) dt \end{pmatrix}$$

lorsque les n intégrales existent.

Notons que l'intégrale de courbe existe si toutes les f_j sont continues. Le résultat de l'intégrale de courbe est un vecteur et non un nombre.

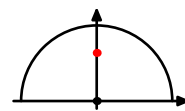
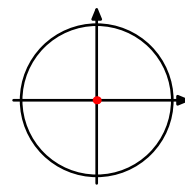
Exemple 2.2.11. Centre de masse d'une courbe. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^1 . Supposons que la courbe ait longueur ℓ et une densité uniforme de 1. (On verra à la section 2.2.3 comment calculer la longueur d'une courbe.)

Si $\|f'(t)\| = 1$, alors son centre de masse est donné par

$$\vec{C} = \frac{1}{\ell} \int_a^b f(t) dt = \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t) dt \\ \int_a^b f_2(t) dt \end{pmatrix}.$$

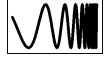
Le centre de masse d'un cercle est, bien sûr, son centre. Le centre de masse du demi-cercle supérieur $f(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $t \in [0, \pi]$ est

$$\vec{C} = \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \int_0^\pi \cos t dt \\ \int_0^\pi \sin t dt \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



Lemme 2.2.12. (*Inégalité du triangle*) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe continue (donc intégrable). On a alors l'inégalité du triangle pour les intégrales de courbes

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$



Démonstration. (Il est recommandé d'avoir fait analyse 2 pour suivre cette démonstration.) On utilise la propriété qu'une fonction continue sur un intervalle compact est *uniformément continue*, à savoir pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|t_1 - t_2| < \delta$, alors $\|f(t_1) - f(t_2)\| < \varepsilon$. En particulier, on a aussi $|f_i(t_1) - f_i(t_2)| < \varepsilon$ pour $i = 1, \dots, n$.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit un $\delta > 0$ qui assure la continuité uniforme. Soit $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{\ell-1} < t_\ell = b\}$ une partition de $[a, b]$ telle que tel que $t_{j+1} - t_j < \delta$. Pour alléger la notation, on pose

$$m_{j,k} = \inf_{[t_{j+1}, t_j]} f_k(t) \quad \text{et} \quad M_{j,k} = \sup_{[t_{j+1}, t_j]} f_k(t).$$

Puisque f_k est uniformément continue et $t_{j+1} - t_j < \delta$, on a que $M_{j,k} \leq m_{j,k} + \varepsilon$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} S(f_1, P) \\ \vdots \\ S(f_n, P) \end{pmatrix} \right\| &= \left\| \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\ell} M_{j,1}(t_{j+1} - t_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{\ell} M_{j,n}(t_{j+1} - t_j) \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\ell} (t_{j+1} - t_j) \left\| \begin{pmatrix} M_{j,1} \\ \vdots \\ M_{j,n} \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\ell} (t_{j+1} - t_j) \left\| \begin{pmatrix} m_{j,1} + \varepsilon \\ \vdots \\ m_{j,n} + \varepsilon \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sum_{j=0}^{\ell} (t_{j+1} - t_j) \left\| \begin{pmatrix} m_{j,1} \\ \vdots \\ m_{j,n} \end{pmatrix} \right\| + (b-a) \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \end{pmatrix} \right\|. \end{aligned} \quad (*)$$

Pour continuer, on remarque que $\sqrt{m_{j,1}^2 + \dots + m_{j,n}^2} \leq \sqrt{f_1(t)^2 + \dots + f_n(t)^2} = \|f(t)\|$ quelque soit $t \in [t_j, t_{j+1}]$. Il s'ensuit que pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}]$, on a

$$\left\| \begin{pmatrix} m_{j,1} \\ \vdots \\ m_{j,n} \end{pmatrix} \right\| \leq \|f(t)\| \leq \sup_{t \in [t_j, t_{j+1}]} \|f(t)\|.$$

On utilise cette inégalité dans (*) ci-haut :

$$\begin{aligned} (*) &\leq \sum_{j=0}^{\ell} (t_{j+1} - t_j) \sup_{[t_j, t_{j+1}]} \|f(t)\| + \varepsilon(b-a)\sqrt{n} \\ &= S(\|f\|, P) + \varepsilon(b-a)\sqrt{n}. \end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie pour toutes les partitions de $[a, b]$ dont la largeur est plus petite que δ . Puisque $\|f\|$ et chaque f_j sont intégrables, il existe une suite de partitions (P_q) telles que la largeur de P_q est plus petite que δ et $S(f_k, P_q) \rightarrow \int_a^b f_k(t)dt$ et $S(\|f\|, P_q) \rightarrow \int_a^b \|f(t)\|dt$ lorsque $q \rightarrow \infty$.

Par ce qui précède, on a

$$\left\| \begin{pmatrix} S(f_1, P_q) \\ \vdots \\ S(f_n, P_q) \end{pmatrix} \right\| \leq S(\|f\|, P_q) + \varepsilon(b-a)\sqrt{n}.$$

Si on laisse $q \rightarrow \infty$, on obtient

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt + \varepsilon(b-a)\sqrt{n}.$$

cette dernière inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$. Si on laisse $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on obtient l'inégalité souhaitée. \square

Exercice 5. *Théorème fondamental du calcul (version vectoriel).* Démontrer les deux parties de l'énoncé du théorème fondamentale du calcul, à savoir :

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe continue.

1. On pose $F(t) = \int_a^t f(x)dx$. Alors F est dérivable sur (a, b) et $F'(t) = f(t)$.
2. Si f est dérivable et f' est continue sur $[a, b]$, alors $\int_a^t f'(x)dx = f(t) - f(a)$ pour tout $t \in [a, b]$.

2.2.3 Longueur d'arc

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe continue. Soit P une partition finie de $[a, b]$, c'est-à-dire m nombres t_i tels que $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{m+1} = b$. Pour $i = 0, 1, \dots, m-1$, on pose

$$\begin{aligned} \ell_i &= \text{longueur du vecteur } f(t_{i+1}) - f(t_i) \\ &= \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| \end{aligned}$$

et on définit $\ell(P) = \sum_{i=0}^{m-1} \ell_i$. Enfin, on pose $\mathcal{P} = \{P \mid \text{partitions finies de } [a, b]\}$.

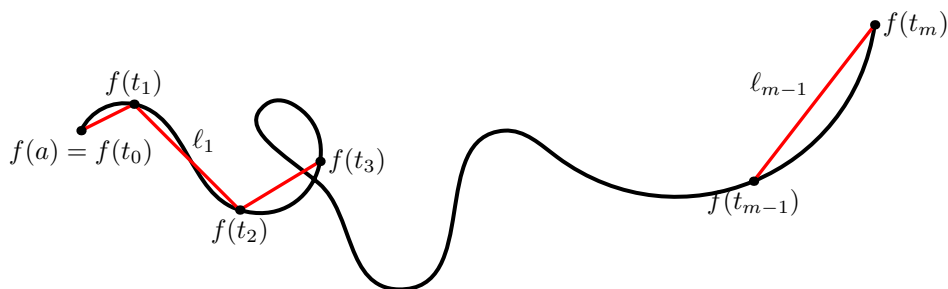


Figure 1

Définition 2.2.13. On dira qu'une courbe continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est *rectifiable* si

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} \ell(P) < \infty.$$

Dans ce cas, le nombre $L(f) = \sup_{\mathcal{P}} \ell(P)$ est appelé la *longueur de la courbe* ou la *longueur d'arc*.

Lemme 2.2.14. Une courbe de classe C^1 est rectifiable.

Remarque. Rappelons qu'une courbe f est définie sur un intervalle $[a, b]$ fermé et borné (compact). Cette hypothèse est essentielle, car une fonction $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 peut avoir une longueur infinie.

Démonstration. Puisque f' est une fonction continue sur un compact, elle est bornée par une constante M , donc $\|f'(t)\| \leq M$ pour tout $t \in [a, b]$. Ensuite, par le théorème des accroissements finis, pour tout $t_1, t_2 \in (a, b)$, il existe $\xi \in (a, b)$ tel que

$$\|f(t_2) - f(t_1)\| = \|f'(\xi)\| |t_2 - t_1| \leq M.$$

Soit maintenant $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b\}$ une partition de $[a, b]$. On a

$$\begin{aligned} \ell(P) &= \sum_{j=0}^{m-1} \|f(t_{j+1}) - f(t_j)\| \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \|f'(\xi_j)\| |t_{j+1} - t_j| \quad (\text{où } \xi_j \in [t_j, t_{j+1}]) \\ &\leq \sum_{j=0}^{m-1} M |t_{j+1} - t_j| \\ &= M \sum_{j=0}^{m-1} |t_{j+1} - t_j| \\ &= M(b - a) < \infty. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.15. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^1 . Sa longueur d'arc est donnée par $L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt < \infty$.

Avant de faire la démonstration, discutons de l'heuristique. Pour une partition $P_n = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = b\}$, où $t_{j+1} - t_j = \frac{b-a}{n}$, on a

$$\begin{aligned} \ell(P_n) &= \sum_{j=1}^m \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^m \left\| \frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right\| |t_j - t_{j-1}| \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^m \left\| \frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right\|. \end{aligned}$$

On reconnaît presque ici une somme de Riemann. Lorsque $n \rightarrow \infty$, on voit que $t_j - t_{j-1} \rightarrow 0$, donc le quotient $\frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}$ devrait tendre vers $f'(t)$ et la somme devrait tendre vers une intégrale.

Ainsi, $\ell(P_n)$, la somme des longueurs des segments $\ell_j = \|f(t_{j+1}) - f(t_j)\|$, s'interprète comme une somme de Riemann.

Démonstration de la proposition 2.2.15. Il est clair que $\int_a^b \|f'(t)\|dt$ est finie, puisque f' est continue sur un compact, donc $\|f'\| \leq M$ sur $[a, b]$.


(\leq) Commençons par montrer que $L(f) \leq \int_a^b \|f'(t)\|dt$. Soit $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b\}$ une partition de $[a, b]$. Remarquons que $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t)dt = f(t_{i+1}) - f(t_i)$, donc

$$\|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t)dt \right\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\|dt.$$

Il suit que

$$\begin{aligned} \ell(P) &= \sum_{i=0}^{m-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\|dt \\ &= \int_a^b \|f'(t)\|dt. \end{aligned}$$

Autrement dit, on a $\ell(P) \leq \int_a^b \|f'(t)\|dt$ pour toute partition P de $[a, b]$. On conclut que $\sup_{\mathcal{P}} \ell(P) \leq \int_a^b \|f'(t)\|dt$.

 (\geq) On montre maintenant que $L(f) \geq \int_a^b \|f'(t)\|dt$. Puisque f' est continue sur $[a, b]$, un compact, f' est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ et soit un $\delta > 0$ qui assure la continuité uniforme. On considère une partition $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b\}$ telle que $|t_{i+1} - t_i| < \delta$. Par continuité uniforme, pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$, on a

$$\|f'(t)\| \leq \|f'(t) - f'(t_i)\| + \|f'(t_i)\| \leq \varepsilon + \|f'(t_i)\|.$$

On obtient l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\|dt &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\|f'(t_i)\| + \varepsilon)dt \\ &= \|f'(t_i)\|(t_{i+1} - t_i) + \varepsilon(t_{i+1} - t_i) \\ &= \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t_i)dt \right\| + \varepsilon(t_{i+1} - t_i) \\ &= \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f'(t_i) - f'(t) + f'(t)]dt \right\| + \varepsilon(t_{i+1} - t_i) \\ &\leq \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f'(t_i) - f'(t)]dt \right\| + \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t)dt \right\| + \varepsilon(t_{i+1} - t_i) \\ &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underbrace{\|f'(t_i) - f'(t)\|}_{\leq \varepsilon} dt + \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| + \varepsilon(t_{i+1} - t_i) \\ &\leq \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| + 2\varepsilon(t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$


On fait la somme sur i pour obtenir

$$\sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\| dt \leq \sum_{i=0}^{m-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| + 2\varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} (t_{i+1} - t_i)$$

ce qui devient

$$\int_a^b \|f'(t)\| dt \leq \ell(P) + 2\varepsilon(b-a) \leq \sup_{P \in \mathcal{P}} \ell(P) + 2\varepsilon(b-a) = L(f) + 2\varepsilon(b-a).$$

Comme ceci est vrai pour tout ε arbitrairement petit, on obtient l'inégalité souhaitée. □

 Il est possible d'étendre la proposition à une classe de courbe un peu plus générale. Si on suppose que la dérivée de f est continue seulement sur (a, b) , alors il est possible que $\lim_{t \rightarrow b^-} \|f'(t)\| = \infty$, donc l'intégrale de la proposition serait une intégrale impropre. Il est alors suffisant que les intégrales impropres convergent.

Corollaire 2.2.16. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe dérivable. Supposons que f' soit continue sur (a, b) . Soit $s \in (a, b)$ fixé. Si les limites

$$\lim_{m \rightarrow a^+} \int_m^s \|f'(t)\| dt \quad \text{et} \quad \lim_{M \rightarrow b^-} \int_s^M \|f'(t)\| dt$$

existent, alors f est rectifiable et la longueur de f est donnée par

$$\lim_{\substack{m \rightarrow a^+ \\ M \rightarrow b^-}} \int_m^M \|f'(t)\| dt.$$

Démonstration. On pose $F(x) = \int_a^x \|f'(t)\| dt$ (vu comme une intégrale impropre) pour $x \in (a, b)$ et $F(a) := 0$, $F(b) := \int_a^b \|f'(t)\| dt$ (vu comme deux intégrales impropres).

Par hypothèse, c'est une fonction bornée. Pour $x \in (a, b)$, on a

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \|f'(t)\| dt \rightarrow \|f'(x)\|$$

lorsque $h \rightarrow 0$, par la démonstration du théorème fondamental du calcul (l'intégrale n'est pas impropre, ici). Ainsi, F est continue et dérivable sur (a, b) . Ensuite, on fixe $y \in (a, b)$. On a

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_a^x \|f'(t)\| dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \left(\int_a^y - \int_x^y \right) \|f'(t)\| dt = \left(\int_a^y - \int_a^y \right) \|f'(t)\| dt = 0,$$

donc F est continue en a . De plus, il est clair que F est continue en $x = b$, puisque $\int_a^x \|f'(t)\| dt \rightarrow \int_a^b \|f'(t)\| dt = F(b)$ lorsque $x \rightarrow b^-$.

On remarque, comme dernière propriété, que F est une fonction croissante, puisque $F'(t) = \|f'(t)\| \geq 0$ pour tout t .

On montre d'abord que f est rectifiable. Pour tout $c < d$, on a

$$\begin{aligned} \|f(d) - f(c)\| &= \left\| \int_c^d f'(t) dt \right\| \\ &\leq \int_c^d \|f'(t)\| dt \\ &= F(d) - F(c) \leq F(b), \quad (\text{car } F(a) = 0 \text{ et } F \text{ est croissante}). \end{aligned}$$

Il suit que $\ell(P) \leq F(b)$, comme à la proposition précédente, donc $L(f) \leq F(b) - F(a)$.

On pose $L_n(f)$ la longueur de f sur l'intervalle $[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$. Pour chaque n , on a

$$F(b - \frac{1}{n}) - F(a - \frac{1}{n}) = \int_{a + \frac{1}{n}}^{b - \frac{1}{n}} \|f'(t)\| dt = L_n(f) \leq L(f).$$

En laissant $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$F(b) - F(a) \leq L(f).$$

On a donc montré que $F(b) \leq L(f) \leq F(b)$, c'est-à-dire que $L(f) = F(b) - F(a)$, comme voulu. □

On fait quelques exemples de calcul.

Exemple 2.2.11. Circonférence du cercle. On paramétrise un cercle de rayon r et de centre $(x_0, y_0)^T$ par $f(t) = (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t)^T$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

On a

$$\begin{aligned} f'(t) &= (-r \sin t, r \cos t), \\ \|f'(t)\| &= \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r, \\ \Rightarrow L(f) &= \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r. \end{aligned}$$

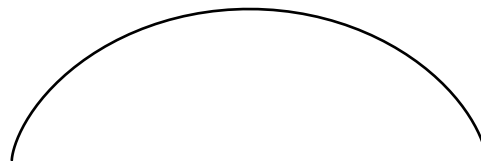
Exemple 2.2.12. On revient à l'exemple 2.2.2. On paramétrise un point sur une roue de rayon r par

$$P = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ -r \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\theta \\ r \end{pmatrix}.$$

Calculons la distance parcourue par P lorsque la roue fait un tour. Pour faire un tour, θ varie entre 0 et 2π . On a

$$P' = \begin{pmatrix} -r \cos \theta + r \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|P'\| &= \sqrt{(r - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta} \\ &= r \sqrt{1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{2r} \sqrt{1 - \cos \theta} \end{aligned}$$



On utilise l'identité $\cos t = 1 - 2 \sin^2(\frac{t}{2})$; on obtient $\|P'\| = 2r \sin(\frac{t}{2})$. On a

$$L(P) = \int_0^{2\pi} \|P'\| dt = \int_0^{2\pi} 2r \sin(\frac{t}{2}) dt = -4r \cos(\frac{t}{2}) \Big|_0^{2\pi} = 8r.$$

Exemple 2.2.13. Soit la rotation d'un angle θ fixé

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

C'est une application linéaire, donc elle agit sur un vecteur \vec{x} par

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe. Montrer que $A \circ f$ a la même longueur que f . Autrement dit, faire la rotation d'une trajectoire ne change pas sa longueur.

Solution. L'application A est elle-même sa dérivée, car elle est linéaire, donc sa dérivée est constante et vaut A . (On peut aussi le calculer directement.) On a donc

$$(A \circ f)'(t) = Af'(t),$$

par le point 3.2 de la proposition. On montre que $\|Af'(t)\| = \|f'(t)\|$, donc que la longueur d'un vecteur est la même que la longueur de sa rotation. De façon générale, on a

$$\begin{aligned} \|A\vec{x}\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= (x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + (x \sin \theta + y \cos \theta)^2 \\ &= (x^2 \cos^2 \theta - 2xy \cos \theta \sin \theta + y^2 \sin^2 \theta) \\ &\quad + (x^2 \sin^2 \theta + 2xy \cos \theta \sin \theta + y^2 \cos^2 \theta) \\ &= x^2 \cos^2 \theta + x^2 \sin^2 \theta + y^2 \cos^2 \theta + y^2 \sin^2 \theta \\ &= x^2 + y^2 = \|\vec{x}\|^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$L(A \circ f) = \int_a^b \|(A \circ f)'(t)\| dt = \int_a^b \|A(f'(t))\| dt = \int_a^b \|f'(t)\| dt = L(f).$$

Exemple 2.2.14. Approximer π . Il est généralement accepté que la circonférence d'un cercle est 2π (soit comme définition de π ou comme conséquence d'une autre définition).

On divise le cercle en n points :

$$z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_1 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad z_{n-1} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n-1}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n-1}\right) \end{pmatrix}.$$

Par l'exemple précédent, on sait que la longueur est préservée lorsque l'on effectue une rotation. Cela signifie que l'arc de cercle entre z_j et z_{j+1} a une longueur de $\frac{2\pi}{n}$ et les segments $[z_j, z_{j+1}]$ et $[z_0, z_1]$ ont la même longueur.

Soit

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

un paramétrage du cercle. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\|z_1 - z_0\| = \left\| \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \gamma'(\theta) d\theta \right\| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \|\gamma'(\theta)\| d\theta = \frac{2\pi}{n}.$$

On a donc $\pi \geq \frac{n\|z_1 - z_0\|}{2}$. Si l'on peut calculer $\|z_1 - z_0\|$, cela donnera une approximation par défaut de π .

Si on prend $n = 6$, alors on a

$$z_1 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

et donc $\|z_1 - z_0\| = 1$. Il s'ensuit que $\pi \geq 3$.

Exercice 6. Faire comme à l'exemple 2.2.16 pour montrer les propriétés suivantes de la longueur d'arc.

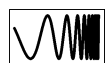
a) Si D est une dilatation d'un facteur $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $L(D \circ f) = \lambda L(f)$. Ici, D est définie

$$\text{par } D\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

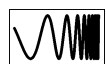
b) Si T est une translation par un vecteur \vec{v} , alors $L(T \circ f) = L(f)$. Ici, T est défini par $T\vec{x} = \vec{x} + \vec{v}$. (Attention! La dérivée de T n'est pas T elle-même, car T n'est pas linéaire. Montrez d'abord que la dérivée de T est la matrice identité.)

c) Si R est une réflexion selon l'axe des x , alors $L(R \circ f) = L(f)$. Ici, R est défini par

$$R\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$



d) Refaire le c) avec une réflexion selon un axe $\vec{\ell}$ faisant un angle θ avec l'axe des x .



Exercice. Construire une courbe de longueur infinie. Soit $f_0: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe définie par $f_0(t) = (t, 0)^T$. Soit les quatre transformations affines suivantes :

$$T_1(x, y) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T_2(x, y) = \left(\text{translation de } \left(\frac{1}{3}, 0\right)^T \right) \circ \left(\text{Rotation de } 45^\circ \right) \circ \left(\text{dilatation de } \frac{\sqrt{2}}{6} \right)$$

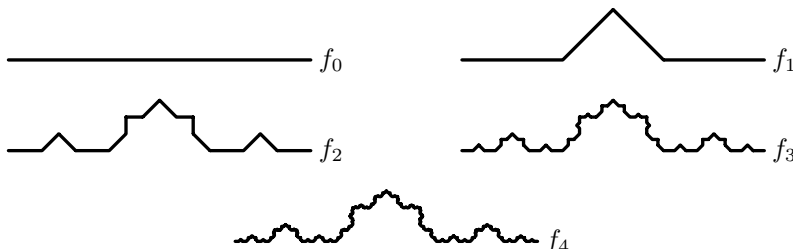
$$T_3(x, y) = \left(\text{translation de } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)^T \right) \circ \left(\text{Rotation de } -45^\circ \right) \circ \left(\text{dilatation de } \frac{\sqrt{2}}{6} \right)$$

$$T_4(x, y) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ensuite, on définit une suite de courbes f_n de la façon suivante. D'abord, on définit f_n^* par

$$f_n^*(t) = \begin{cases} T_1 \circ f_{n-1}(t), & \text{si } t \in [0, 1]; \\ T_2 \circ f_{n-1}(t-1), & \text{si } t \in [1, 2]; \\ T_3 \circ f_{n-1}(t-2), & \text{si } t \in [2, 3]; \\ T_4 \circ f_{n-1}(t-3), & \text{si } t \in [3, 4]; \end{cases}$$

et on pose $f_n(t) = f_n^*(4t)$. Les trajectoires de f_0, f_1, f_2, f_3 et f_4 sont dessinées ci-bas.



- a) Soit $n > 1$. Montrer que $\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leq \frac{1}{3}\|f_n(t) - f_{n-1}(t)\|$. Dédurre que $\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leq \frac{M}{3^n}$, où M est une constante. Conclure que $\{f_n(t)\}_{n=0}^\infty$ est une suite de Cauchy.

On pose $f(t)$ la limite de $f_n(t)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. On peut montrer (on le tient pour acquis) que $\|f_n(t) - f(t)\| \leq \frac{1}{2} \frac{M}{3^{n-1}}$ pour tout $t \in [0, 1]$, donc la convergence est uniforme et la limite f est continue. (Se référer au cours d'analyse 1 ou 2 pour les détails.)

- b) Montrer que $L(f_n) = \frac{1}{3}L(f_{n-1}) + \frac{\sqrt{2}}{6}L(f_{n-1}) + \frac{\sqrt{2}}{6}L(f_{n-1}) + \frac{1}{3}L(f_{n-1})$ et calculer la longueur de f_n .
 c) Montrer que $L(f) \geq L(f_n)$ pour tout n .
 (Indice : Montrez que pour chaque n , il existe une partition P_n qui atteint le suprémum de $L(f_n)$.)
 d) Dédurre que f a une longueur infinie.

Remarques. 1. La courbe f est fractale. Sa dimension fractale est strictement entre 1 et 2. Ce fractal est connu sous le nom de *flocon de Koch*. Il est aussi intéressant de noter que la limite f est nulle part dérivable. De plus, c'est un exemple de courbe uniformément continue qui n'est pas lipschitzienne.

2. Cet exercice illustre pourquoi la définition 2.2.13 est donnée en terme de partitions, plutôt qu'en utilisant $\int_a^b \|f'(t)\| dt$: la définition 2.2.13 est valide pour les courbes non dérivables, comme dans cet exercice. C'est ce qui permet de parler de la longueur de f ; sinon la notion de longueur n'aurait pas de sens pour f . Évidemment, pour les courbes de classe C^1 , il est bien plus commode d'utiliser l'intégrale que les partitions pour calculer la longueur d'arc.

Exercice 7. Concaténation. Soit $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\gamma_2: [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux courbes de classe C^1 . Supposons que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. On définit alors la *concaténation de γ_1 et γ_2* comme la courbe $\gamma_1 \# \gamma_2: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\gamma_1 \# \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a, b]; \\ \gamma_2(t) & \text{si } t \in [b, c]. \end{cases}$$

1. Montrer que $\gamma_1 \# \gamma_2$ est de classe C^1 sur $[a, b] \cup (b, c]$ et que

$$\lim_{t \rightarrow b^-} (\gamma_1 \# \gamma_2)'(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow b^+} (\gamma_1 \# \gamma_2)'(t)$$

- existent. Dédurre que $(\gamma_1 \# \gamma_2)'$ est bornée.
2. Montrer que $\gamma_1 \# \gamma_2$ est rectifiable.
 3. Montrer que $L(\gamma_1 \# \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$.
 4. Calculer la longueur de $\gamma(t) = (t, |t|)^T$, où $t \in [-1, 1]$, en considérant cette courbe comme la concaténation de deux courbes de classe C^1 .

Par l'exercice précédent, on peut introduire la définition suivante.

Définition 2.2.17. Une courbe de classe C^1 par morceaux est la concaténée d'un nombre fini de courbes de classe C^1 .

Ainsi, les courbes de classe C^1 par morceaux sont rectifiables et satisfont à la formule

$$L(\gamma_1 \# \cdots \# \gamma_n) = \sum_{j=1}^n L(\gamma_j).$$

2.2.4 Courbes équivalentes

Il est souvent possible de paramétrer la même trajectoire par deux courbes différentes. Pour que la longueur d'arc corresponde à la notion intuitive de longueur, il est naturel de vouloir que la longueur soit la même pour une trajectoire *peu importe comment elle est paramétrée*. Ceci mène à la notion de *courbes équivalentes*.

Définition 2.2.18. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux courbes continues. On dit que f et g sont *équivalentes* s'il existe une fonction $u: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ telle que

- i) $u(a) = \alpha$ et $u(b) = \beta$;
- ii) u est dérivable et strictement croissante;
- iii) $g(u(t)) = f(t)$ pour tout $t \in [a, b]$.

Une fonction u satisfaisant i), ii) et iii) est appelée un *changement de paramètre admissible*.

Théorème 2.2.19. Soit f et g deux courbes de classe C^1 équivalentes. Alors

- a) f et g ont la même trajectoire;
- b) f et g ont la même orientation, c'est-à-dire le même sens de parcours;
- c) $L(f) = L(g)$.

Démonstration. a) Par iii), on a $f([a, b]) = g(u([a, b])) = g([\alpha, \beta])$, car u est bijective, par ii).

- b) On dérive l'égalité en iii) pour obtenir $g'(u(t))u'(t) = f'(t)$. On voit que $g'(u(t))$ et $f'(t)$ sont colinéaires, donc ils ont la même direction. De plus, par ii), on a $u' > 0$, donc $g'(u(t))$ et $f'(t)$ pointent dans le même sens.

- c) On a

$$L(g) = \int_{\alpha}^{\beta} \|g'(s)\| ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \|g'(u(t))\|u'(t)dt && \text{(avec } s = u(t), ds = u'(t)dt) \\
&= \int_a^b \|g'(u(t))u'(t)\|dt && \text{(car } u'(t) \text{ est un scalaire)} \\
&= \int_a^b \|f'(t)\|dt && \text{(par iii)} \\
&= L(f).
\end{aligned}$$

□

Remarque. Si on a $u(a) = \beta$ et $u(b) = \alpha$ et $u'(t) < 0$, alors on dit que le changement de paramètre renverse l'orientation.

L'exemple le plus simple pour renverser l'orientation est de prendre $u(t) = -t$, c'est-à-dire obtenir l'équivalence par $g(t) = f(-t)$.

Exemple 2.2.15. Montrer que les deux paramétrages du cercle suivant ne sont pas équivalents :

$$\begin{aligned}
f: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 && g: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2. \\
t &\mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} && t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Solution. La longueur de f est le périmètre du cercle parcouru une fois, donc 2π . Celle de g est le périmètre du cercle parcouru deux fois, donc 4π . Si f et g étaient équivalentes, elles auraient la même longueur, d'où f et g ne sont pas équivalentes.

Jusqu'à maintenant, le paramétrage d'une trajectoire était déjà donné. Le problème inverse de trouver un paramétrage d'une trajectoire donnée est souvent assez difficile. Il n'y a pas une manière unique de le faire, mais comme le montre le théorème, les différents paramétrages préservent la longueur de la courbe.

Exemple 2.2.16. Soit la droite affine paramétrée par $f(t) = (t, at + b)^T$. Trouver un paramétrage équivalent de la forme $g(t) = (h(t), t)^T$.

Solution. Cette droite a pour équation cartésienne $y = ax + b$, car $(x, y) = f(t)$, donc $x = t$. On exprime donc x en fonction de y . On a $x = \frac{y-b}{a}$. On obtient donc le paramétrage en posant $t = y$ et $h(t) = \frac{t-b}{a}$, c'est-à-dire

$$g(t) = \begin{pmatrix} \frac{t-b}{a} \\ t \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.2.17. Graphe d'une fonction. Soit $y = f(x)$ une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Son *graphe* est le sous-ensemble $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ de \mathbb{R}^2 . Ceci définit une courbe que l'on peut paramétrer par $\varphi(t) = (t, f(t))^T$. Ce type de paramétrage est appelé *paramétrage de graphe*.

Par exemple, pour la fonction $y = \sqrt{1 - x^2}$ définie sur $x \in [-1, 1]$, son paramétrage de graphe est $\varphi(t) = (t, \sqrt{1 - t^2})^T$. C'est le demi-cercle au dessus de l'axe des x .

Pour la fonction $y = \sqrt[3]{x}$, en $x = 0$, la dérivée n'existe pas. On choisit plutôt de paramétrer comme le graphe d'une fonction de $y : x = y^3$. Le paramétrage de graphe est $\alpha(t) = (t^3, t)^T$. [Attention! L'ordre est important. On remplace y par t et x par $y^3 = t^3$, donc on obtient le couple $(t^3, t)^T$ et non $(t, t^3)^T$.]

Exemple 2.2.18. Équations algébriques. Plusieurs trajectoires sont définies comme le lieu géométrique des points (x, y) vérifiant une certaine équation $f(x, y) = C$. Par exemple, un cercle de rayon 1 est décrit par l'équation $x^2 + y^2 = 1$. Bien qu'il n'y ait pas de méthode générale pour traiter ces cas, le paramétrage de graphe ou les coordonnées polaires (voir le prochain exemple) sont souvent utiles.

Par exemple, on considère l'équation $xy^2 = 1$. Si on peut isoler x ou y , alors on obtiendra un paramétrage de graphe. Ici on a soit $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ou $x = \frac{1}{y^2}$. On choisit le second, car il n'y a pas de racine. Le paramétrage est donc $\varphi(t) = (\frac{1}{t^2}, t)^T$ sur l'intervalle $(-\infty, 0)$ ou $(0, +\infty)$.

Remarque. Le paramétrage $\gamma(t) = (t, \frac{1}{\sqrt{t}})$ est équivalent, donc c'est également une autre façon adéquate de paramétrer la trajectoire, mais on préfère φ pour éviter la racine carrée.


Exemple 2.2.19. Coordonnées polaires. On rappelle ici les coordonnées polaires. Chaque point du plan (x, y) s'écrit comme en fonction de sa norme $r = \|(x, y)^T\|$ et de l'angle qu'il forme avec l'axe des x positifs $\theta = \angle(x, y)$. La formule exacte de $\angle(\cdot, \cdot)$ est un peu compliquée puisque ce n'est pas une fonction continue. Une trajectoire C s'exprime en coordonnées polaires en exprimant chaque point $(x, y) \in C$ par

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Par exemple, trouvons le paramétrage d'une ellipse d'équation $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. Dans le but d'utiliser l'identité $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, on pose $x = \sqrt{3} \cos t$ et $y = \sqrt{2} \sin t$. En remplaçant de l'équation de l'ellipse, on a

$$\frac{(\sqrt{3} \cos t)^2}{3} + \frac{(\sqrt{2} \sin t)^2}{2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Ainsi, les points de la forme $(\sqrt{3} \cos t, \sqrt{2} \sin t)^T$ se trouvent sur l'ellipse.

 Pour montrer que tous les points de l'ellipse sont de cette forme, on constate qu'il y a une bijection entre l'ellipse et le cercle : l'application $(x, y) \mapsto (\sqrt{3}x, \sqrt{2}y)$ envoie le cercle sur l'ellipse. Son inverse est $(u, v) \mapsto (\frac{u}{\sqrt{3}}, \frac{v}{\sqrt{2}})$, qui envoie l'ellipse sur le cercle, donc c'est bien une application bijective. Ainsi, si un point de l'ellipse n'était pas atteint par notre paramétrage, alors celui-ci manquerait aussi sur le paramétrage du cercle, ce qui est une contradiction.

Exemple 2.2.20. Frontière d'une région. Soit la région contenue entre la courbe $x = y^2$ et la droite $y = x - 2$. Paramétrer la frontière de la région.

La frontière sera une portion de la parabole et une portion de la droite. On aura besoin de leurs points d'intersection. On a

$$\begin{aligned} x = (x - 2)^2 &\Leftrightarrow x = x^2 - 4x + 4 \\ &\Leftrightarrow 0 = x^2 - 5x + 4 \\ &\Leftrightarrow 0 = (x - 4)(x - 1) \\ &\Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

Les points d'intersection sont donc $P_1 = (1, -1)$ et $P_2 = (4, 2)$.

On peut prendre le paramétrage suivant :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}, \quad \text{si } t \in [-2, 1]$$

et

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t - 2 \end{pmatrix}, \quad \text{si } t \in [1, 2].$$

Exemple 2.2.21. Intersection d'un cylindre et d'une sphère. Paramétrer la courbe d'intersection entre la sphère $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ et le demi-cylindre $C : x^2 + y^2 = 1, z \geq 0$.

On utilise les coordonnées cylindriques. Le cylindre est paramétré par

$$\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = \sin \theta, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

On porte ce paramétrage dans l'équation de la sphère :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + z^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 1 + z^2 = 4$$

et donc $z = \pm\sqrt{3}$. Puisqu'on a $z \geq 0$, il suit que $z = \sqrt{3}$. Le paramétrage recherché est donc

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

On reconnaît ici un cercle dans le plan $z = \sqrt{3}$.

Exemple 2.2.22. Intersection d'un cylindre et d'un plan incliné. Paramétriser la courbe d'intersection entre le cylindre $C : x^2 + y^2 = 1$ et la plan $P : ax + cz = 0$, où $a, c \in \mathbb{R}$ sont des constantes et $c \neq 0$.

On utilise encore les coordonnées cylindriques. On remplace x par $\cos \theta$ dans l'équation du plan, ce qui donne $z = -\frac{a}{c} \cos \theta$. Ainsi, la courbe est

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ -\frac{a}{c} \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Bien que l'on ait paramétré la courbe, il est difficile de dire ce qu'elle est. En fait, on peut montrer que la courbe est une ellipse dans le plan P . Pour ce faire, on utilise un repère dans le plan. D'abord, les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont orthogonaux et appartiennent à P . On veut une base orthonormée de P , donc on remplace v_1 par $v := v_1/\|v_1\|$. Ainsi, le plan correspond aux vecteurs $(x, y, z)^T$ tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ 0 \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On remplace x et y dans l'équation du cylindre :

$$\frac{s^2 c^2}{a^2 + c^2} + t^2 = 1.$$

On voit que cela décrit une ellipse par rapport aux paramètres s et t . Si on paramétrise cette ellipse par

$$s = -\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{c} \cos \alpha \quad \text{et} \quad t = \sin \alpha,$$

alors on retombe sur le paramétrage γ .

Exercice 8. *Paramétrage par longueur d'arc.* Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe régulière. Soit ℓ sa longueur. On définit $g: [a, b] \rightarrow [0, \ell]$ par

$$g(t) := \int_a^t \|f'(\tau)\| d\tau.$$

1. Montrer que g est de classe C^1 .
2. Montrer que g est strictement croissante.

Une fonction continue et strictement croissante est bijective sur son image. On tient ce fait pour acquis. On a donc que g est bijective et ainsi son inverse existe. On note son inverse g^{-1} .

3. On pose $t = g^{-1}(s)$, c'est un changement de paramétrage. Soit $\tilde{f} = f \circ g^{-1}$. Montrer que $\|\tilde{f}'(s)\| = 1$ pour tout $s \in [0, \ell]$.
4. Conclure que $s = \int_0^s \|\tilde{f}'(\sigma)\| d\sigma$.

Remarque. Le paramétrage par longueur d'arc peut se définir de la façon suivante : on dit que f est une courbe paramétrée par longueur d'arc si $\|f'\| \equiv 1$. L'exercice précédent montre comment passer au paramétrage par longueur d'arc de sorte que la courbe de départ et la nouvelle courbe soient équivalentes. Ainsi, il est toujours possible pour une courbe régulière de s'écrire sous cette forme. Cette forme permet d'exprimer la normale et la *courbure* de façon plus simple, mais ceci serait plutôt discuté dans un cours de géométrie différentielle.

2.2.5 Surfaces paramétrées dans \mathbb{R}^n

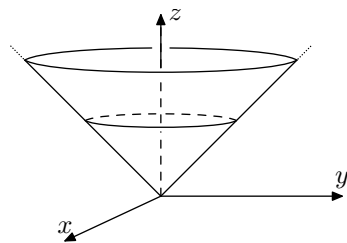
Définition 2.2.20. On appelle *surface paramétrée* dans \mathbb{R}^n une fonction $\Sigma: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ où $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Si Σ est de classe C^k , on dira que la *surface est de classe C^k* . L'ensemble $\Sigma(D)$ est appelé la *trace* de Σ .

Un point $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ est sur la surface s'il existe $(u, v) \in D$ tel que $\Sigma(u, v) = \vec{x}$. On dira que \vec{x} est *multiple* s'il existe au moins deux points (u, v) , (u', v') tels que $\Sigma(u, v) = \Sigma(u', v') = \vec{x}$. Une surface sans point multiple est dite *simple*.

Exemple 2.2.23. Soit Σ la surface paramétrée par

$$\Sigma(\theta, r) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ r \end{pmatrix},$$

où $(\theta, r) \in D = [0, 2\pi) \times (0, \infty)$. C'est une surface de classe C^∞ et elle est simple. En effet, on a



$$\begin{aligned} \Sigma(\theta_1, r_1) &= \Sigma(\theta_2, r_2) \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} r_1 \cos \theta_1 \\ r_1 \sin \theta_1 \\ r_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r_2 \cos \theta_2 \\ r_2 \sin \theta_2 \\ r_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow r_1 &= r_2 \\ \Rightarrow \cos \theta_1 &= \cos \theta_2 \quad \text{et} \quad \sin \theta_1 = \sin \theta_2 && \text{(car } r_1, r_2 \neq 0) \\ \Rightarrow \theta_1 &= \theta_2 && \text{(car } \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)) \end{aligned}$$

La trace est un cône. En effet, on peut l'écrire

$$\Sigma(D) = \{r(\cos \theta, \sin \theta, 0)^T + (0, 0, r)^T \mid \theta \in [0, 2\pi), r > 0\},$$

c'est-à-dire une collection de cercles de rayon r translatés de r vers le haut.

Exemple 2.2.24. Soit $D = [0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ et $\Sigma: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

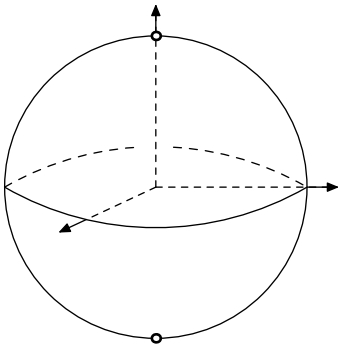
$$\Sigma(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

C'est une surface de classe C^∞ . Elle est simple, car

$$\begin{aligned} \Sigma(\theta_1, \varphi_2) = \Sigma(\theta_2, \varphi_2) &\Rightarrow \sin \varphi_1 = \sin \varphi_2 \\ &\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 \end{aligned} \quad (\text{car } \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$$

et

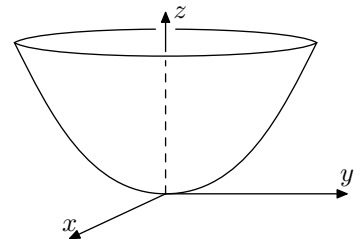
$$\begin{aligned} &\begin{cases} \cos \theta_1 \cos \varphi_1 = \cos \theta_2 \cos \varphi_2 \\ \sin \theta_1 \cos \varphi_1 = \sin \theta_2 \cos \varphi_2 \end{cases} \quad (\text{car } \cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 \neq 0) \\ \Rightarrow &\begin{cases} \cos \theta_1 = \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 = \sin \theta_2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \end{aligned}$$



La trace de Σ est la sphère de rayon 1 centrée en $\vec{0}$ moins le pôle nord et le pôle sud. Si $D = [0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, le pôle nord est dans la trace de Σ , mais c'est un point multiple, car $(0, 0, 1)^T = \Sigma(\theta, \frac{\pi}{2})$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$.

Exemple 2.2.25. Graphe d'une fonction. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ et soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Son graphe définit une surface paramétrée par $\Sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))^T$. C'est une surface simple et sa trace redonne le graphe de f .

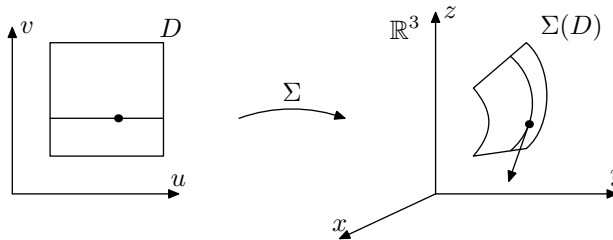
Par exemple, la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ sur le domaine $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ donne la surface ci-contre. On l'appelle un parabololoïde.



2.2.6 Vecteur normal et plan tangent d'une surface

Soit $\Sigma: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface de classe C^1 .
On écrit explicitement $\Sigma(u, v)$ sous forme paramétrique

$$\Sigma(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}.$$



Soit $\vec{r}_0 := \Sigma(u_0, v_0)$ un point sur la surface.
On définit la courbe suivante

$$C_1: \text{ courbe définie par } \begin{aligned} S_1(u) &= \Sigma(u, v_0) \\ S_1: I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

où $I = \{u \mid (u, v_0) \in D\} \subseteq \mathbb{R}$. On peut dériver S comme une courbe ordinaire

$$\frac{d}{du} S_1(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} x(u, v_0) \\ \frac{\partial}{\partial u} y(u, v_0) \\ \frac{\partial}{\partial u} z(u, v_0) \end{pmatrix}.$$

On pose $\vec{T}_{u_0} := S_1'(u_0)$; c'est un vecteur tangent à la courbe en \vec{r}_0 , donc tangent à la surface Σ .

On répète ce processus avec la coordonnée en v . On pose

$$C_2: \text{ courbe définie par } \begin{aligned} S_2(v) &= \Sigma(u_0, v) \\ S_2: J &\rightarrow \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

où $J = \{v \mid (u_0, v) \in D\} \subseteq \mathbb{R}$. Ensuite, on dérive S_2 et on obtient

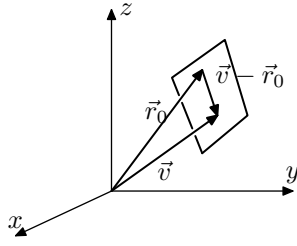
$$\frac{d}{dv} S_2(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v} x(u_0, v) \\ \frac{\partial}{\partial v} y(u_0, v) \\ \frac{\partial}{\partial v} z(u_0, v) \end{pmatrix}.$$

On pose $T_{v_0} := S_2'(v_0)$. C'est un vecteur tangent à la courbe C_2 en \vec{r}_0 .

Enfin, on pose

$$\vec{N} := \vec{T}_u \times \vec{T}_v$$

le produit vectoriel. On remarque que $\vec{N} \neq \vec{0}$ si \vec{T}_u et \vec{T}_v ne sont pas parallèles.



Définition 2.2.21. On appelle le plan engendré par T_u et T_v au point \vec{r}_0 le plan tangent à Σ lorsque \vec{N} est non nul. Il est donné par $P = \{x\vec{T}_u + y\vec{T}_v + \vec{r}_0 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Le vecteur \vec{N} est perpendiculaire au plan tangent, donc un vecteur \vec{v} appartient au plan, c'est-à-dire qu'il s'écrit comme $x\vec{T}_u + y\vec{T}_v + \vec{r}_0$, si et seulement si $\vec{v} - \vec{r}_0$ est orthogonal à \vec{N} : $(\vec{v} - \vec{r}_0) \bullet \vec{N} = 0$.

Proposition 2.2.22. Soit $\Sigma: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface de classe $C^1(D)$ et $r_0 = \Sigma(u_0, v_0)$ un point de la surface tel que $\vec{N} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v|_{(u_0, v_0)}$ est non nul. Dans ce cas, le plan engendré par \vec{T}_u et \vec{T}_v est tangent à toutes les courbes tracées sur Σ et passant \vec{r}_0 .

Démonstration. Considérons la courbe $f(t) = \Sigma(\gamma(t))$, où $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ et $\gamma(t_0) = (u_0, v_0)$. Tout d'abord, en dérivant en chaîne, on a $f'(t) = d\Sigma(\gamma(t))\gamma'(t)$, donc en t_0 , on obtient $f'(t_0) = d\Sigma(u_0, v_0)\gamma'(t_0)$. On a aussi

$$d\Sigma(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \Bigg|_{(u_0, v_0)} = \begin{pmatrix} 1^{\text{ère}} \text{ col} & 2^{\text{e}} \text{ col} \\ \vec{T}_u & \vec{T}_v \end{pmatrix}.$$

Il suit, en faisant le produit matriciel, que

$$f'(t) = \begin{pmatrix} \vec{T}_u & \vec{T}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma'_1(t_0) \\ \gamma'_2(t_0) \end{pmatrix} = \gamma'_1(t_0)\vec{T}_u + \gamma'_2(t_0)\vec{T}_v.$$

En calculant $f'(t_0) \bullet \vec{N}$, on trouve

$$\begin{aligned} f'(t_0) \bullet \vec{N} &= (\gamma'_1(t_0)\vec{T}_u + \gamma'_2(t_0)\vec{T}_v) \bullet [\vec{T}_u \times \vec{T}_v] \\ &= \gamma'_1(t_0)[\vec{T}_u \bullet (\vec{T}_u \times \vec{T}_v)] + \gamma'_2(t_0)[\vec{T}_v \bullet (\vec{T}_u \times \vec{T}_v)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ceci veut dire que le vecteur $f'(t_0)$ tangent à f appartient au plan perpendiculaire à N . □

Définition 2.2.23. Le point $\Sigma(u, v)$ est dit *régulier* si \vec{N} est non nul en (u, v) . Si tous les points sont réguliers, la surface est dite *régulière*.

Remarque. Une surface régulière est souvent appelé *lisse*, puisqu'elle n'a pas de coin, de point de rebroussement ou d'autres singularités.

Définition 2.2.24. Le vecteur $\vec{N} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v$ est appelé *produit vectoriel fondamentale*, tandis que le vecteur unitaire $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ est appelé *vecteur normal principal*.

Exemple 2.2.26. Surface non régulière (coin). Soit le cône $\Sigma: [0, 2\pi] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ donné par $\Sigma(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r)^T$. (Remarquez que ce n'est pas une surface simple à cause des points $(\theta, 0)$.) On a

$$\vec{T}_\theta = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \vec{N} = \vec{T}_\theta \times \vec{T}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 1 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ -r \end{pmatrix}.$$

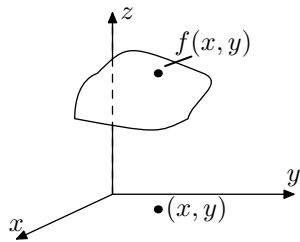
Notons qu'au point $(0, 0, 0)^T$, on a $\vec{N} = \vec{0}$; la surface n'y est pas régulière. En effet, au « bout » du cône, il y a un coin.

Soit $\vec{s} = \Sigma(\theta_0, r_0)$. On a $\vec{N} = (r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0, -r_0)^T$ en ce point. Le plan tangent en \vec{s} est donné par l'équation cartésienne

$$r_0 \cos \theta_0(x - r_0 \cos \theta_0) + r_0 \sin \theta_0(y - r_0 \sin \theta_0) - r_0(z - r_0) = 0.$$

Exemple 2.2.27. Graphe d'une fonction. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ et soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Le paramétrage $\Sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$ paramétrise le graphe de f et la trace de Σ est exacte le graphe de f .

On a ici



$$\vec{T}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix},$$

$$\vec{N} = \vec{T}_x \times \vec{T}_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On voit que $\vec{N} \neq \vec{0}$ en tout point, donc c'est une surface régulière.

Soit $(x_0, y_0) \in D$ et soit $\vec{s} = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ un point sur la surface. Alors le plan tangent en \vec{s} est donné par l'équation cartésienne

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - f(x_0, y_0)) = 0.$$

2.2.7 L'aire des surfaces

Comment calculer l'aire d'une surface ? On cherche une façon de définir l'aire ayant les propriétés suivantes :

1. Elle est bien définie pour toutes les surfaces régulières ;
2. Elle coïncide avec l'aire des surfaces que l'on sait déjà calculer, comme la sphère, le plan (autrement dit, elle concorde avec l'intuition de la vie réelle) ;
3. Elle est indépendante du paramétrage choisi pour la trace.

Ce dernier point est très important et sera démontré à la prochaine section. Il signifie que l'aire est une quantité intrinsèque de la surface, c'est-à-dire que l'aire est une propriété de la trace et *non* du paramétrage, bien que ce sera à l'aide du paramétrage que l'on fera les calculs.

On utilise une démarche similaire à celle pour la longueur des courbes de classe C^1 . On utilisera des parallélogrammes comme approximation plutôt que des segments de droites.

Soit $\Sigma: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface de classe C^1 . Supposons d'abord que D est un rectangle $D = R$. Soit $P = \bigcup_{ij} R_{ij}$ une partition en rectangles R_{ij} de R telle que R_{ij} sont de dimension $\Delta u \times \Delta v$. Dénotons par P_{ij} le parallélogramme engendré par $\Delta u \vec{T}_u$ et $\Delta v \vec{T}_v$. On a la formule

$$\text{Aire}(P_{ij}) = \|\Delta u \vec{T}_u \times \Delta v \vec{T}_v\| = \|\vec{N}_{ij}\| \Delta u \Delta v.$$

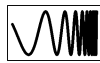
Pour $\Delta u, \Delta v$ petits, on a l'approximation $\text{Aire}(\Sigma(R_{ij})) \approx \Delta u \Delta v \|\vec{N}_{ij}\|$. En faisant la somme sur tous les rectangles, on obtient une somme de Riemann. Ensuite, en laissant $\Delta u, \Delta v \rightarrow 0$, on obtient

$$\lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0^+ \\ \Delta v \rightarrow 0^+}} \sum_{ij} \|\vec{N}_{ij}\| \Delta u \Delta v = \iint_R \|\vec{N}(u, v)\| \, du dv = \iint_R \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| \, du dv.$$

Définition 2.2.25. L'aire d'une surface $\Sigma: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 est défini par

$$A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{N}(u, v)\| \, du dv.$$

On utilisera la notation $dS := \|\vec{N}(u, v)\| \, du dv$ et on appellera dS l'élément d'aire.

 *Remarque.* On pourrait vouloir étendre la notation d'aire à des surfaces qui ne sont pas de classe C^1 en approximant la surface par des polyèdres, comme il a été fait pour les courbes. Cependant, il y a des considérations plus subtiles pour les surfaces qui nous éloigneraient du contenu du cours, donc on se contentera de définir l'aire pour des surfaces de classe C^1 .

Exemple 2.2.28. Cône tronqué. Soit la surface

$$\vec{\Sigma}(\theta, r) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ r \end{pmatrix}^T, \quad D = [0, 2\pi] \times (0, 1].$$

1. On calcule les vecteurs tangents

$$\vec{T}_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)^T \quad \vec{T}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 1)^T.$$

2. On calcule le vecteur normal

$$\|\vec{N}\| = \sqrt{2}r.$$

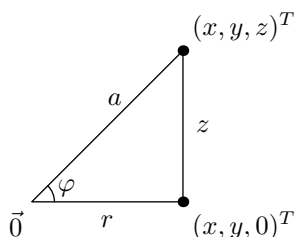
3. Enfin, on obtient l'aire

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \iint_D \sqrt{2}r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2}r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} d\theta = \sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

Exemple 2.2.29. Sphère de rayon a . Soit la sphère de rayon a centrée à l'origine. Voici une façon de paramétrer la sphère. D'abord, on paramétrise les points $(x, y, 0)^T$ en coordonnées polaires par

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

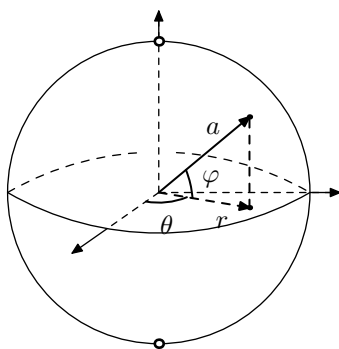
où $r \in [0, 1]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Pour un point sur la sphère $(x, y, z)^T$, on obtient le triangle suivant ainsi que les relations trigonométriques



$$\cos \varphi = \frac{r}{a} \Rightarrow r = a \cos \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{z}{a} \Rightarrow z = a \sin \varphi$$

On obtient donc le paramétrage



$$\Sigma(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a \cos \theta \cos \varphi \\ a \sin \theta \cos \varphi \\ a \sin \varphi \end{pmatrix},$$

$$(\theta, \varphi) \in D = [0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

1. On calcule les vecteurs tangents

$$\vec{T}_\theta = \begin{pmatrix} -a \sin \theta \cos \varphi \\ a \cos \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{T}_\varphi = \begin{pmatrix} -a \cos \theta \sin \varphi \\ -a \sin \theta \sin \varphi \\ a \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

2. On calcule le vecteur normal

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \vec{T}_\theta \times \vec{T}_\varphi = \begin{vmatrix} i & -a \sin \theta \cos \varphi & -a \cos \theta \sin \varphi \\ j & a \cos \theta \cos \varphi & -a \sin \theta \sin \varphi \\ k & 0 & a \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 \cos \theta \cos^2 \varphi \\ a^2 \sin \theta \cos^2 \varphi \\ a^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi + a^2 \cos^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 \cos \theta \cos^2 \varphi \\ a^2 \sin \theta \cos^2 \varphi \\ a^2 \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. On calcule la norme du vecteur normal

$$\begin{aligned}\|\vec{N}\|^2 &= a^4 \cos^2 \theta \cos^4 \varphi + a^4 \sin^2 \theta \cos^4 \varphi + a^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ &= a^4 \cos^4 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + a^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ &= a^4 \cos^4 \varphi + a^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ &= a^4 \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\ &= a^4 \cos^2 \varphi\end{aligned}$$

et donc $\|\vec{N}\| = a^2 |\cos \varphi|$.

4. Enfin, on obtient l'aire par

$$\begin{aligned}A(\Sigma) &= \int_{\Sigma} dS = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \|\vec{N}\| d\theta d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} a^2 |\cos \varphi| d\theta d\varphi \\ &= 2\pi a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \\ &= 2\pi a^2 \sin \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\pi a^2.\end{aligned}$$

2.2.8 Surfaces équivalentes

Définition 2.2.26. Soit Σ_1, Σ_2 deux surfaces paramétrées de classe C^1 ayant la même trace. On dit qu'elles sont C^1 -équivalentes s'il existe une transformation $T: \text{Dom}(\Sigma_1) \rightarrow \text{Dom}(\Sigma_2)$

bijjective et de classe C^1 telle que $\det(T') > 0$ et telle que

$$\begin{array}{ccc}
 D_1 & \searrow^{\Sigma_1} & \\
 T \downarrow & \mathbb{C} \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 D_2 & \nearrow_{\Sigma_2} &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \Sigma_1(u, v) = \Sigma_2(T(u, v)) \\
 \text{pour tout } (u, v) \in \text{Dom}(\Sigma_1).
 \end{array}$$

Théorème 2.2.27. Si Σ_1 et Σ_2 sont C^1 -équivalentes, alors $A(\Sigma_1) = A(\Sigma_2)$.

Démonstration. On souhaite montrer que

$$\iint_{D_1} \|N_1(s, t)\| \, dsdt = \iint_{D_2} \|N_2(u, v)\| \, dudv.$$

Comme Σ_1 et Σ_2 sont équivalentes, on a $(s, t) = T(u, v)$ pour une certaine application T , c'est-à-dire $\Sigma_1 \circ T(u, v) = \Sigma_2(u, v)$. On effectue donc ce changement de variable

$$\iint_{D_1} \|N_1(s, t)\| \, dsdt = \iint_{D_2} \|N_1(T(u, v))\| \det(T') \, dudv.$$

Le reste de la démonstration consiste à montrer que $N_1(T(u, v)) \det(T') = N_2(u, v)$. On a

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Sigma_2}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} \Sigma_1 \circ T = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial s} \frac{\partial T_1}{\partial u} + \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} \frac{\partial T_2}{\partial u} = aT_s + cT_t \\
 \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} \Sigma_1 \circ T = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial s} \frac{\partial T_1}{\partial v} + \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} \frac{\partial T_2}{\partial v} = bT_s + dT_t,
 \end{aligned}$$

où on a posé a, b, c, d comme étant

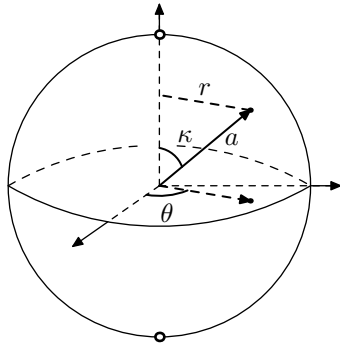
$$T' = DT = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial u} & \frac{\partial T_1}{\partial v} \\ \frac{\partial T_2}{\partial u} & \frac{\partial T_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
 N_2 &= T_u \times T_v = (aT_s + cT_t) \times (bT_s + dT_t) \\
 &= ab \underbrace{T_s \times T_s}_{=0} + adT_s \times T_t + cbT_t \times T_s + cd \underbrace{T_t \times T_t}_{=0} \\
 &= adT_s \times T_t - cbT_s \times T_t \\
 &= (ad - bc)T_s \times T_t \\
 &= \det(T')N_1.
 \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. □

Exemple 2.2.30. Paramétrages d'une sphère. On a déjà donné un paramétrage de la sphère. En voici un autre. Plutôt que de prendre l'angle φ selon le plan- xy , on le prend selon l'axe des z . Notons ce nouvel angle κ . On a la relation $\kappa + \varphi = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, le paramétrage est



$$\Sigma_1(\theta, \kappa) = \begin{pmatrix} a \cos \theta \sin \kappa \\ a \cos \theta \sin \kappa \\ a \cos \kappa \end{pmatrix}$$

où $\kappa \in [0, \pi]$.

Ce paramétrage et le paramétrage suivant

$$\Sigma(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a \cos \theta \cos \varphi \\ a \sin \theta \cos \varphi \\ a \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (\theta, \varphi) \in D = [0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

sont équivalents, avec la transformation T donnée par

$$T(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi - \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse maintenant aux méthodes pour trouver le paramétrage lorsqu'une surface est déjà donnée. Pour le cours, les surfaces se manifesteront de deux façons principales : comme le graphe d'une fonction ou comme une surface de niveau.

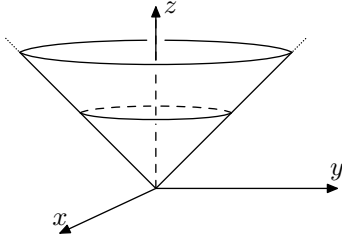
Soit $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$ et $x = h(y, z)$ trois fonctions de classe C^1 . Alors leur graphe est chacune une surface qui se paramétrise respectivement par

$$\Sigma_f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}, \quad \Sigma_g(x, z) = \begin{pmatrix} x \\ g(x, z) \\ z \end{pmatrix}, \quad \Sigma_h(y, z) = \begin{pmatrix} h(y, z) \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.2.31. Un cône est le graphe de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. (On retire le point $(0, 0)$ du domaine, car z n'est pas dérivable en ce point.) On peut le paramétrer par

$$\Sigma(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'il se paramétrise aussi par



$$\Sigma_1(\theta, r) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ r \end{pmatrix};$$

c'est un paramétrage équivalent. Il n'y a pas de bon choix ou de mauvais choix, ces deux paramétrages peuvent être utiles selon le contexte.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Ses courbes de niveau $f(x, y, z) = C$ sont des surfaces dans \mathbb{R}^3 . Il n'y a pas de méthode qui fonctionne à coup sûr pour les paramétrer, mais souvent les coordonnées cylindriques ou sphériques seront utiles.

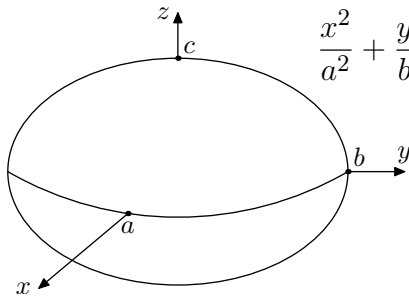
Exemple 2.2.32. Ellipsoïde. Soit $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$. Les courbes de niveau sont des ellipsoïdes. On les paramétrise à l'aide des coordonnées sphériques. On s'intéresse à

$$f(x, y, z) = 1.$$

On pose

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \cos \varphi, \\ y = b \sin \theta \cos \varphi, \\ z = c \sin \varphi. \end{cases}$$

En substituant, on a



$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= \frac{a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{b^2} + \frac{c^2 \sin^2 \varphi}{c^2} \\ &= \cos^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \sin^2 \varphi \\ &= \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \\ &= 1. \end{aligned}$$

Exemple 2.2.33. Parfois les coordonnées polaires sont utiles. Soit $f(x, y, z) = 2(x^2 y^2 + y^2 z + z x^2) - a^2(x^2 + y^2 + z)$. On veut paramétrer la courbe de niveau $f(x, y, z) = a^4$. Avec les coordonnées cylindriques, on a

$$\begin{aligned} x(r, \theta) &= r \cos \theta, \\ y(r, \theta) &= r \sin \theta, \end{aligned}$$

donc

$$2(x^2 y^2 + y^2 z + z x^2) - a^2(x^2 + y^2 + z)$$

$$\begin{aligned}
&= 2(r^2 \cos^2 \theta r^2 \sin^2 \theta + z(r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta)) - a^2(r^2 + z) \\
&= 2(r^2 \cos^2 \theta r^2 \sin^2 \theta + r^2 z) - a^2 r^2 - a^2 z \\
&= z(2r^2 - a^2) + 2r^2 \cos^2 \theta r^2 \sin^2 \theta - a^2 r^2 \\
&= a^4.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$z(r, \theta) = \frac{a^4 - 2r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - a^2 r^2}{2r^2 - a^2}.$$

Le paramétrage est

$$\Sigma(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ \frac{a^4 - 2r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - a^2 r^2}{2r^2 - a^2} \end{pmatrix}$$

2.3. Intégrale sur les courbes et les surfaces

Cette section introduit trois types d'intégrales que l'on étudiera. Elles utiliseront toutes comme fondement l'intégrale pour la longueur $\int_{\gamma} ds$ ou bien l'intégrale pour l'aire $\int_S dS$.

2.3.1 Intégrale d'un champ scalaire

L'intégrale d'un champ scalaire est vu comme la moyenne d'un champ scalaire sur une courbe ou sur une surface. Strictement parlant, les deux autres types d'intégrale seront des cas particuliers de celle-ci, mais leur notation et leur interprétation est si importante qu'elles auront leur propre section.

Sur une courbe

Pour l'intégrale de Riemann sur \mathbb{R} , rappelons que

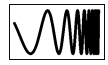
$$\sum_i f(x_i) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0^+} \int_a^b f(x) dx.$$

Ici, Δx est vu comme la longueur d'un petit bout d'intervalle.

Soit $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^1 et C sa trajectoire. Soit $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ une partition de $[a, b]$. On peut remplacer Δx par $\Delta r = \|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\|$. Considérons $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un domaine D qui contient C . On considère la somme de Riemann

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m-1} f(\vec{r}(t_i)) \|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\| &= \sum_{i=0}^{m-1} f(\vec{r}(t_i)) \frac{\|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\|}{\Delta t} \Delta t \\
&\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0^+} \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt.
\end{aligned}$$

Dans cette expression, on peut voir $\frac{\|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\|}{\Delta t}$ comme la vitesse moyenne de parcours du paramétrage et Δt comme un pas de temps. Ainsi, « à la limite », le premier tend vers la vitesse instantanée $\|\vec{r}'(t)\|$ et le second, vers un « élément de temps » dt . On appellera donc *élément de longueur* $ds = \|\vec{r}'(t)\|dt$.



Remarque. On introduit la terminologie d'éléments de temps, de surface, de longueur pour l'intuition sans les aborder de façon rigoureuse. Notons, par contre, que ces notions sont définies en géométrie différentielle. On les appelle des *formes différentielles*; elles donnent un sens à des objets comme dt ou $dA = dx \wedge dy$. En analyse, on peut définir les infinitésimaux pour parler des objets comme dt (voir la notion d'*hyperréel*). Bien qu'il soit possible de leur accorder un sens précis, ceci nous éloignerait du cadre du cours.

Définition 2.3.1. L'intégrale d'un champ scalaire (d'une fonction) $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$) sur une courbe C de classe C^1 paramétrée par $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, est donnée par

$$\int_C f ds := \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

On note $ds = \|\vec{r}'(t)\|dt$ et l'appelle *élément de longueur* au besoin.

Notation. On notera l'intégrale d'un champ scalaire de différentes façon, selon le contexte. Lorsque l'on intègre sur une courbe C , on utilisera la notation

$$\int_C f ds,$$

où la borne d'intégration, ici, est C pour indiquer que l'on intègre le long de la courbe C . Bien sûr, quand viendra le temps de *calculer* l'intégrale, il faudra remplacer C par les limites du paramétrage. On utilisera aussi parfois la notation

$$\int_\gamma f ds,$$

où γ est un paramétrage quelconque de C . Son interprétation est la même que ci-haut.

L'intégrale ordinaire de f sur un intervalle $[a, b]$ est une sorte de moyenne de f . En effet, la quantité

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

est la valeur moyenne de f sur $[a, b]$. Même si on ne divisait pas par la longueur de $[a, b]$, il est intéressant de voir $\int_a^b f$ comme une sorte valeur moyenne de la fonction intégrée. Cette interprétation persiste pour l'intégrale de courbe.

Exemple 2.3.1. Moyenne. Soit C une courbe de longueur ℓ et soit $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur la courbe. On peut voir l'intégrale

$$\frac{1}{\ell} \int_C f ds \tag{*}$$

comme la valeur moyenne de f sur C . Ainsi, on interprète $\int_C f ds$ comme une sorte de valeur moyenne de f .

Par exemple, si f est une densité de masse, alors (*) est la densité moyenne le long de la courbe.

Cette intégrale peut avoir d'autres interprétations, notamment en physique.

Exemple 2.3.2. Masse d'une corde. Supposons qu'une corde C dans l'espace est paramétrée par $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ et que sa densité en chaque point est donnée par $\rho: C \rightarrow (0, \infty)$, alors on calcule la masse de la corde par

$$m = \int_a^b \rho ds = \int_a^b \rho(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

En effet, la « quantité » ρds est un « élément de masse », donc en intégrant ces « éléments de masse », on obtient la masse de la corde.

Voici maintenant deux exemples de calcul.

Exemple 2.3.3. Soit C un cercle de rayon a paramétré par

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix},$$

pour $t \in [0, 2\pi]$. Soit f une fonction définie par $f(x, y) = |xy|$. Calculons $\int_C f ds$.

1. Calcul de $\|\vec{r}'\|$: On a $\vec{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t)^T$ et donc

$$\|\vec{r}'(t)\|^2 = a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t = a^2.$$

On obtient donc $\|\vec{r}'(t)\| = a$.

2. Calcul de f : On a

$$f(\vec{r}(t)) = f(a \cos t, a \sin t) = |(a \cos t)(a \sin t)| = a^2 |\cos t \sin t|.$$

3. Calcul de l'intégrale : D'abord, on a

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \int_0^{2\pi} f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'\| ds \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 |\cos t \sin t| a dt \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \right) |\cos t \sin t| dt. \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant le changement de variable $u = t - \frac{\pi}{2}$, on a

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos t \sin t| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(u + \frac{\pi}{2}) \sin(u + \frac{\pi}{2})| du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin u (-\cos u)| du.$$

Ainsi, on obtient $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos t \sin t| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t \sin t| dt$. Les deux autres intégrales se simplifient de la même façon. On a donc

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= a^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \right) |\cos t \sin t| dt \\ &= 4a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt. \\ &= 4a^3 \int_0^1 u du \\ &= 4a^3 \frac{u^2}{2} \Big|_0^1 \\ &= 2a^3. \end{aligned}$$

$\begin{aligned} u &= \sin t \\ du &= \cos t dt \end{aligned}$
--

Exemple 2.3.4. Soit la spirale S d'équation paramétrique

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$$

définie pour $t \in [0, 4\pi]$. Soit

$$g(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Calculons $\int_S g ds$.

1. Calcul de $\|\vec{f}'(t)\|$: On a $\vec{f}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)^T$ et donc

$$\|\vec{f}'(t)\|^2 = \sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + 1 = 2.$$

On obtient donc $\|\vec{f}'(t)\| = \sqrt{2}$.

2. Calcul de g : On a

$$g(\vec{f}(t)) = g(\cos t, \sin t, t) = \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t + t^2} = \frac{1}{1 + t^2}.$$

3. Calcul de l'intégrale : On a

$$\begin{aligned} \int_S g ds &= \int_0^{4\pi} g(\vec{f}(t)) \|\vec{f}'(t)\| dt \\ &= \int_0^{4\pi} \frac{1}{1 + t^2} \sqrt{2} dt \end{aligned}$$

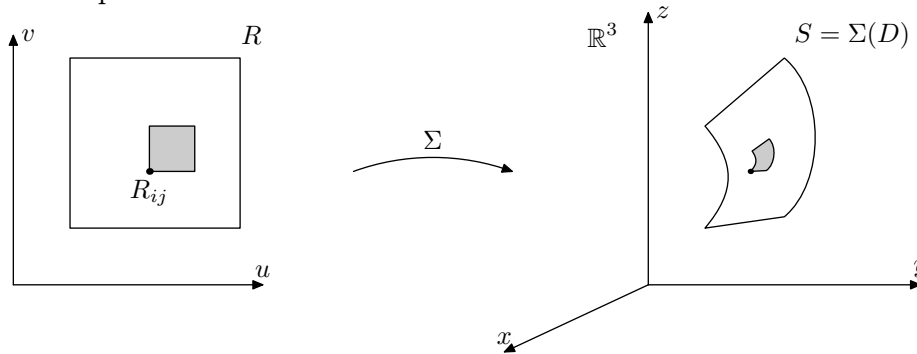
$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2} \int_0^{4\pi} \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \sqrt{2} \arctan t \Big|_0^{4\pi} \\
&= \sqrt{2}(\arctan(4\pi) - \arctan(0)) \\
&= \sqrt{2} \arctan(4\pi).
\end{aligned}$$

Sur une surface

Pour l'intégrale de Riemann sur \mathbb{R}^2 , rappelons que

$$\sum_{i,j} f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y \xrightarrow[\Delta y \rightarrow 0^+]{\Delta x \rightarrow 0^+} \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Soit R un rectangle dans \mathbb{R}^2 . Soit Σ une surface de classe C^1 . Soit S la trace de Σ . Soit $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire sur la surface.



On partitionne le rectangle R en petits rectangles R_{ij} dont le sommet inférieur gauche se trouve au point $(u_i, v_i) \in R$. On se penche sur la somme de Riemann suivante

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} f(\Sigma(u_i, v_j)) \text{Aire}(\Sigma(R_{ij})) &\approx \sum_{i,j} f(\Sigma(u_i, v_j)) \underbrace{\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|}_{\vec{N}} \Delta u \Delta v \\
&\xrightarrow[\Delta y \rightarrow 0^+]{\Delta x \rightarrow 0^+} \iint_R f(\Sigma(u, v)) \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| du dv.
\end{aligned}$$

Ceci motive la définition générale suivante.

Définition 2.3.2. L'intégrale d'un champ scalaire (d'une fonction) $f = f(x, y, z)$ sur une surface S paramétrée par $\Sigma: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ et de classe C^1 est donnée par

$$\int_S f dS := \iint_D f(\Sigma(u, v)) \|\vec{N}\| du dv.$$

On note $dS = \|\vec{N}\| du dv$ et on l'appelle *élément de surface*.

Tout comme pour l'intégrale de courbe, on peut voir $\int_S f dS$ comme une sorte valeur moyenne de f sur S . Lorsque l'on divise par l'aire de la surface, on obtient la vraie valeur moyenne

$$\text{Valeur moyenne de } f = \frac{1}{\text{Aire}(S)} \int_S f dS$$

Même si on ne divisait pas l'intégrale par l'aire, il est commode de voir l'intégrale comme une sorte de moyenne.

Exemple 2.3.5. Si f est la température en tout point sur la surface, alors

$$\frac{1}{\text{Aire}(S)} \int_S f dS$$

est la température moyenne de la surface.

Exemple 2.3.6. Soit le cône C d'équation

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

contenu dans $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z \geq 0\}$. Soit f une fonction scalaire définie par

$$f(x, y, z) = \frac{x^2(x^2 + y^2)}{z^2}.$$

Calculons $\int_P f dS$.

D'abord, il faut choisir un paramétrage de la surface. Puisque que le domaine est un disque, on prend

$$\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ r \end{pmatrix},$$

où $\theta \in [0, 2\pi]$ et $r \in [0, 1]$.

1. Calcul de $\|\vec{N}\|$: On a

$$d\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & i \\ \sin \theta & r \cos \theta & j \\ 1 & 0 & k \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cos \theta \\ -r \sin \theta \\ r \end{pmatrix}.$$

On trouve pour la norme

$$\|\vec{N}\|^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta + r^2 = r^2 + r^2 = 2r^2,$$

c'est-à-dire $\|\vec{N}\| = \sqrt{2}r$.

2. Calcul de f : On a

$$\begin{aligned} f(\varphi(r, \theta)) &= f(r \cos \theta, r \sin \theta, r) \\ &= \frac{r^2 \cos^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)}{r^2} \\ &= r^2 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

3. Calcul de l'intégrale : On a

$$\begin{aligned} \int_C f dS &= \iint_D f(\varphi(r, \theta)) \|\vec{N}(r, \theta)\| dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2 \theta \sqrt{2} r dr d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \int_0^1 r^3 dr d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

2.3.2 Propriété des intégrales de champ scalaire

Théorème 2.3.3. *L'intégrale d'un champ scalaire sur une courbe ou sur une surface est invariante du choix de paramétrage. Plus précisément : soit f un champ scalaire défini sur une courbe C ou sur une surface S , alors*

1. Si \vec{r}_1 et \vec{r}_2 sont deux paramétrages C^1 -équivalents de C , on a

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\vec{r}_1(t)) \|\vec{r}_1'(t)\| dt = \int_c^d f(\vec{r}_2(\tau)) \|\vec{r}_2'(\tau)\| d\tau;$$

2. Si Σ_1 et Σ_2 sont deux paramétrages C^1 -équivalents de S , on a

$$\int_S f dS = \iint_{D_1} f(\Sigma_1(u, v)) \|\vec{N}_1(u, v)\| du dv = \iint_{D_2} f(\Sigma_2(p, q)) \|\vec{N}_2(p, q)\| dp dq.$$

Démonstration. 1. Comme les courbes sont C^1 -équivalentes, il existe un changement de variable $\tau = u(t)$ tel que $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(u(t))$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} d\tau &= u'(t)dt, \\ \vec{r}_1'(t) &= u'(t)r_2'(u(t)). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_c^d f(\vec{r}_2(\tau)) \|\vec{r}_2'(\tau)\| d\tau &; = \int_a^b f(\vec{r}_2(u(t))) \|\vec{r}_2'(u(t))\| u'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\vec{r}_1(t)) \|\vec{r}_1'(t)\| dt. \end{aligned}$$

2. Comme les surfaces sont C^1 -équivalentes, il existe un changement de variable $(p, q) = T(u, v)$ tel que $\Sigma_1(u, v) = \Sigma_2 \circ T(u, v)$. On a donc

$$\begin{aligned} dpdq &= \text{Jac}(T) du dv, \\ \vec{N}_2(T(u, v)) \text{Jac}(T) &= \vec{N}_1(u, v). \end{aligned}$$

Pour la seconde ligne, voir la preuve du théorème 2.2.27. On a donc

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} f(\Sigma_2(p, q)) \|\vec{N}_2(p, q)\| dpdq &= \iint_{D_1} f(\Sigma_2 \circ T(p, q)) \|\vec{N}_2(T(u, v))\| \text{Jac}(T) du dv \\ &= \iint_{D_1} f(\Sigma_1(u, v)) \|\vec{N}_1(u, v)\| du dv \end{aligned}$$

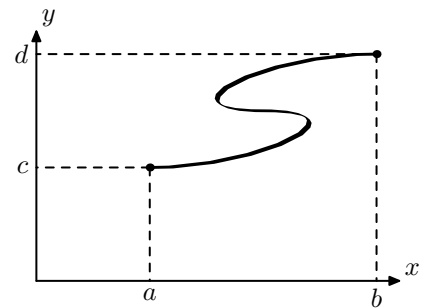
□

Ainsi, les définitions d'intégrales de champ scalaire ne dépendent pas des paramétrages. Ceci veut dire que la valeur de l'intégrale dépend de l'objet géométrique dans \mathbb{R}^3 et non de la façon que cet objet est spécifié. Ceci est cohérent avec l'interprétation de $\frac{1}{\text{Aire}(S)} \int_S f dS$ comme la moyenne de f sur S ; la moyenne doit seulement dépendre de la surface dans \mathbb{R}^3 et de f , mais pas du choix de paramétrage.

2.3.3 Centre de masse

On considère une corde de densité ρ comme sur la figure. On souhaiterait trouver son centre de masse, c'est-à-dire « le point où la force de gravité est appliqué ».

Soit m la masse totale de la corde et soit $\gamma: [p, q] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un paramétrage. On supposera qu'il est de classe C^1 .



On peut voir $\frac{\rho}{m}$ comme une densité de probabilité, ce qui permet de définir une loi de probabilité sur l'abscisse et sur l'ordonnée de la façon suivante. Soit $[a_1, b_1]$ un intervalle sur l'axe des x ; on définit \mathbb{P}_x par

$\mathbb{P}_x(a_1 \leq X \leq b_1)$ = la proportion de masse de γ au-dessus de l'axe de $[a_1, b_1]$.

De façon semblable, sur un intervalle $[c_1, d_1]$ de l'axe des y , on définit \mathbb{P}_y par

$\mathbb{P}_y(c_1 \leq Y \leq d_1)$ = la masse de γ au-dessus de l'axe de $[c_1, d_1]$.

Soit

$$C = (x_C, y_C)$$

le centre de masse. Il correspond à l'espérance des deux loi ci-haut

$$x_C = \mathbb{E}_x[X] = \int_a^b X d\mathbb{P}_x = \int_p^q \gamma_1(t) \frac{\rho(t)}{m} \|\gamma'(t)\| dt,$$

$$y_C = \mathbb{E}_y[Y] = \int_c^d Y d\mathbb{P}_y = \int_p^q \gamma_2(t) \frac{\rho(t)}{m} \|\gamma'(t)\| dt.$$

On peut voir la quantité $\rho(t)\|\gamma'(t)\|dt$ comme un élément de masse, donc la somme des $\gamma_j(t)\rho(t)\|\gamma'(t)\|dt$ est la somme des positions γ_j pondérée par $\rho(t)\|\gamma'(t)\|dt$.

Enfin, la masse de la corde est donnée par

$$m = \int_p^q \rho(t)\|\gamma'(t)\| dt,$$

donc on a les équations

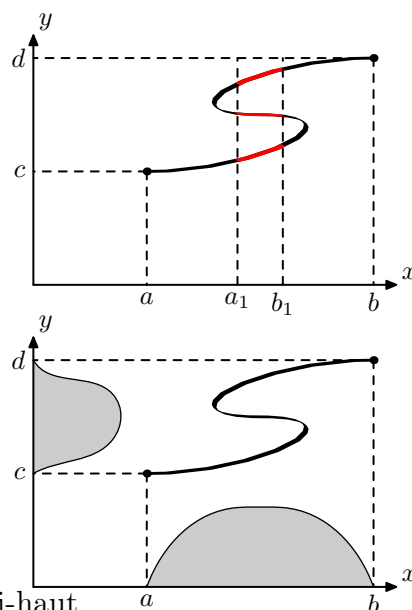
$$x_C = \frac{\int_p^q \gamma_1(t)\rho(t)\|\gamma'(t)\| dt}{\int_p^q \rho(t)\|\gamma'(t)\| dt}, \quad y_C = \frac{\int_p^q \gamma_2(t)\rho(t)\|\gamma'(t)\| dt}{\int_p^q \rho(t)\|\gamma'(t)\| dt}.$$

Exemple 2.3.7. Trouver le centre de masse du cercle unité, lorsque la densité sur le cercle est donné

$$\rho(x, y) = x + 1.$$

0. Le cercle est paramétré par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$



On a déjà calculé que $\|\gamma'(t)\| = 1$. De plus, sur le cercle, ρ est

$$\rho(\cos t, \sin t) = 1 + \cos t.$$

1. On calcule d'abord la masse totale. On a

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi} \rho(\cos t, \sin t) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \cos t) dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

2. On calcule x_C . On a

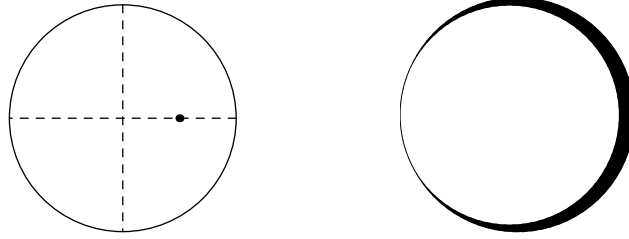
$$\begin{aligned} mx_C &= \int_0^{2\pi} \gamma_1(t) \rho(\cos t, \sin t) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos t (1 + \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t + \cos^2 t) dt \\ &= 0 + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2} \right) dt \\ &= \pi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2t) dt \\ &= \pi + \frac{1}{2} \frac{\sin(2t)}{2} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \pi, \end{aligned}$$

donc $x_C = \frac{1}{2}$.

3. On calcule y_C . On a

$$\begin{aligned} my_C &= \int_0^{2\pi} \gamma_2(t) \rho(\cos t, \sin t) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin t (1 + \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin t + \sin t \cos t) dt \\ &= 0 + \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2x)}{2} dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a donc $y_C = 0$.



Sur les figures, on peut voir la courbe et son centre de masse, ainsi que la distribution de la masse sur le cercle, qui est représenté par l'épaisseur de la courbe. Le centre de masse se trouve à un endroit naturel, car la plus grande partie de la masse est à droite et la masse est symétrique par rapport à l'axe des x .

Le centre de masse d'une surface s'obtient de façon tout à analogue. Le centre de masse d'une surface S paramétrée par $\Sigma: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, où $D \subseteq \mathbb{R}^2$, est donné par les trois équations

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{m} \iint_D \Sigma_1(u, v) \rho(\Sigma(u, v)) \|\vec{N}(u, v)\| \, du \, dv \\ y_C &= \frac{1}{m} \iint_D \Sigma_2(u, v) \rho(\Sigma(u, v)) \|\vec{N}(u, v)\| \, du \, dv \\ z_C &= \frac{1}{m} \iint_D \Sigma_3(u, v) \rho(\Sigma(u, v)) \|\vec{N}(u, v)\| \, du \, dv \end{aligned}$$

Exemple 2.3.8. Soit le tore T obtenu par la révolution du cercle $(y - 2)^2 + z^2 = 1$ autour de l'axe des z . On considère une densité de masse donnée par

$$\rho(x, y, z) = \frac{x + y + 2}{x^2 + y^2}.$$

Trouver le centre de masse.

0. Paramétrage : Le tore est une surface de révolution. Le cercle décrit est donné par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Comme la révolution est faite autour de l'axe des z , on obtient le tore en multipliant par la matrice de rotation :

$$\Sigma(t, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2 + \cos t) \sin \theta \\ (2 + \cos t) \cos \theta \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Sur le tore, la densité de masse prend la forme

$$\begin{aligned} \rho(\Sigma(t, \theta)) &= \rho((2 + \cos t) \sin \theta, (2 + \cos t) \cos \theta, \sin t) \\ &= \frac{(2 + \cos t)(\sin \theta + \cos \theta) + 2}{(2 + \cos t)^2} \\ &= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 + \cos t} + \frac{2}{(2 + \cos t)^2}. \end{aligned}$$

1. Vecteur normal et masse totale : On a

$$d\Sigma(t, \theta) = \begin{pmatrix} \sin t \sin \theta & -(2 + \cos t) \cos \theta \\ -\sin t \cos \theta & -(2 + \cos t) \sin \theta \\ \cos t & 0 \end{pmatrix},$$

donc le vecteur normal est

$$\vec{N}(t, \theta) = \begin{pmatrix} (2 + \cos t) \cos t \sin \theta \\ -(2 + \cos t) \cos t \cos \theta \\ -(2 + \cos t) \sin t \end{pmatrix}$$

et la norme est

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{(2 + \cos t)^2 \cos^2 t + (2 + \cos t)^2 \sin^2 t} = (2 + \cos t).$$

Pour la masse totale, on a

$$\begin{aligned} m &= \int_T \rho dS \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 + \cos t} + \frac{2}{(2 + \cos t)^2} \right) (2 + \cos t) d\theta dt \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin \theta + \cos \theta) d\theta dt + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2}{(2 + \cos t)} d\theta dt \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2}{(2 + \cos t)} d\theta dt && \text{(car } \int_0^{2\pi} \pi \cos \theta d\theta = 0 \\ &= 4\pi \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}. && \text{et } \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0) \end{aligned}$$

On trouve d'abord la primitive de cette intégrale. On a

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{2 + \cos t} &= \int \frac{1}{2 + \frac{1-x^2}{1+x^2}} \frac{2}{1+x^2} dx \\ &= 2 \int \frac{dx}{2 + 2x^2 + 1 - x^2} \\ &= 2 \int \frac{dx}{3 + x^2} \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{dx}{1 + \frac{x^2}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{\sqrt{3} dy}{1 + y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \tan\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos t &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ dt &= \frac{2}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{3} dy &= dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan y + C \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + C.
\end{aligned}$$

Ici, cette primitive n'est valide que pour $t \in (-\pi, \pi)$. On la prolonge en définissant

$$F(t) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) & \text{si } t \in (-\pi, \pi) \\ \frac{\sqrt{3}\pi}{3} & \text{si } t = \pi \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} & \text{si } t \in (\pi, 3\pi) \end{cases}$$

La masse est donc

$$m = 4\pi \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t} = 4\pi F(2\pi) - 4\pi F(0) = 4\pi \left(\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}\pi^2}{3}.$$

2. Calcul de x_C : On a

$$\begin{aligned}
mx_C &= \int_T \Sigma_1 \rho dS \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Sigma_1(t, \theta) \rho(\Sigma_1(t, \theta)) \|\vec{N}(t, \theta)\| dt d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} -(2 + \cos t) \sin \theta \left(\frac{\sin \theta + \cos \theta}{(2 + \cos t)} + \frac{2}{(2 + \cos t)^2} \right) (2 + \cos t) d\theta dt \\
&= - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta (2 + \cos t) d\theta dt \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta (2 + \cos t) d\theta dt - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \sin \theta d\theta dt \\
&= - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta (2 + \cos t) d\theta dt \\
&= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta dt - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos t dt d\theta \\
&= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -4\pi \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta \\
&= -4\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{9\pi}{2}.
\end{aligned}$$

3. Calcul de y_C : On a

$$\begin{aligned}
my_C &= \int_T \Sigma_2 \rho dS \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 + \cos t) \cos \theta \left(\frac{\sin \theta + \cos \theta}{(2 + \cos t)} + \frac{2}{(2 + \cos t)^2} \right) (2 + \cos t) d\theta dt \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta (2 + \cos t) d\theta dt \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta (2 + \cos t) d\theta dt + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \cos \theta d\theta dt \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \cos^2 \theta d\theta dt + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \cos t dt d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \cos^2 \theta d\theta dt \\
&= 4\pi \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta \\
&= 4\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}.
\end{aligned}$$

4. Calcul de z_C : On a

$$\begin{aligned}
mz_C &= \int_T \Sigma_3 \rho dS \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t \left(\frac{\sin \theta + \cos \theta}{(2 + \cos t)} + \frac{2}{(2 + \cos t)^2} \right) (2 + \cos t) d\theta dt \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t \cos \theta d\theta dt + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t \sin \theta d\theta dt + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2 \sin t}{(2 + \cos t)} d\theta dt \\
&= 4\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{(2 + \cos t)} dt \\
&= 4\pi \log(2 + \cos t) \Big|_0^{2\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

5. Le centre de masse est

$$C = \left(-\frac{9\sqrt{3}}{16\pi}, \frac{9\sqrt{3}}{16\pi}, 0 \right).$$

2.3.4 Intégrale curviligne

On a vu à la section précédente les intégrales d'un champ scalaire. Lorsque l'on a un champ de vecteurs \vec{F} et une courbe C paramétrée par \vec{r} , on peut définir différents champs scalaires, dont celui correspondant à la composante de \vec{F} dans la direction \vec{r}' .

Définition 2.3.4. L'intégrale curviligne d'un champ \vec{F} le long d'une courbe C de classe C^1 paramétrée par $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{s} := \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}'(t) dt.$$

Notation. On utilisera la notation $d\vec{s} = \vec{r}'(t)dt$. Lorsque le paramétrage s'appelle \vec{r} , on utilisera aussi $d\vec{r} = \vec{r}'(t)dt$. De façon général, pour une courbe γ , on utilisera la notation $d\gamma = \gamma'(t)dt$.

Exemple 2.3.9. Soit C la partie du cercle unité au-dessus de l'axe des x et soit le champ de vecteurs $F(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$. Calculer l'intégrale curviligne de F le long de C .

1. On paramétrise C . On a $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, avec $t \in [0, \pi]$.
2. On calcule le vecteur tangent à C . On a $\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$.
3. On calcule $F \circ \vec{r}$. On a

$$F \circ \vec{r}(t) = F(\vec{r}(t)) = F(\cos t, \sin t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

4. On calcule $F(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}'(t)$. On a

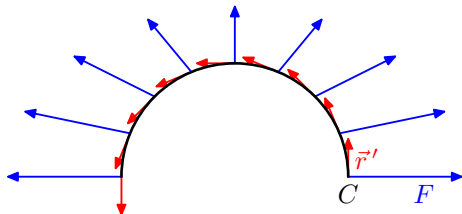
$$\begin{pmatrix} 2 \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = -2 \cos t \sin t + \sin t \cos t = -\cos t \sin t.$$

5. On calcule l'intégrale curviligne. On a

$$\begin{aligned} \int_C F \bullet d\vec{s} &= \int_0^\pi F \bullet \vec{r}' dt \\ &= \int_0^\pi -\cos t \sin t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\int_1^{-1} -u du \\ &= -\int_{-1}^1 u du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \cos t \\ du &= -\sin t dt \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= - \frac{u^2}{2} \Big|_{-1}^1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Interprétation et intérêt de l'intégrale curviligne

Travail. Dans le cas particulier où le champ de vecteur est un champ de forces et que la courbe correspond au déplacement d'une particule, l'intégrale curviligne correspond à la notion de *travail*.

Supposons d'abord que l'on ait un segment de droite C entre les points A et B dans l'espace et un champ de vecteurs constant \vec{F} .

On pose $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$. Le travail est alors $E = \vec{F} \bullet \vec{v}$, c'est-à-dire la composante de \vec{F} dans la direction du déplacement, pondérée par la longueur du déplacement. Ainsi, on peut réécrire l'équation comme

$$E = \underbrace{\left(\vec{F} \bullet \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right)}_{\substack{\text{Composante} \\ \text{de } \vec{F} \text{ dans la} \\ \text{direction } \vec{v}}} \underbrace{\|\vec{v}\|}_{\substack{\text{Longueur} \\ \text{de } \vec{v}}}.$$

Considérons maintenant une force $\vec{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$) et considérons une particule se déplaçant sur une trajectoire C définie par $\vec{r}: t \mapsto \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, sous l'action de \vec{F} . Soit $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ une partition de $[a, b]$ telle que $\Delta t = t_{j+1} - t_j \leq \frac{b-a}{m}$. Posons

$$E_j = \vec{F}(\vec{r}(t_j)) \bullet (\vec{r}(t_{j+1}) - \vec{r}(t_j)).$$

Le travail E est approximé par

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m-1} E_j &= \sum_{j=0}^{m-1} \vec{F}(\vec{r}(t_j)) \bullet (\vec{r}(t_{j+1}) - \vec{r}(t_j)) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \vec{F}(\vec{r}(t_j)) \bullet \left(\frac{\vec{r}(t_{j+1}) - \vec{r}(t_j)}{\Delta t} \right) \Delta t.
\end{aligned}$$

Le travail correspond donc à

$$\begin{aligned}
E &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sum_{j=0}^{m-1} \vec{F}(\vec{r}(t_j)) \bullet \left(\frac{\vec{r}(t_{j+1}) - \vec{r}(t_j)}{\Delta t} \right) \Delta t \\
&= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}'(t) dt.
\end{aligned}$$

Ceci représente l'un des intérêts physiques d'introduire l'intégrale curviligne.

Exemple 2.3.10. Soit la spirale S paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 4\pi].$$

Calculer le travail effectué par cette particule dans un champ gravitationnel $F(x, y, z) = (0, 0, -1)^T$.

1. On calcule $F \circ \vec{r}$. Comme F est un champ constant, on a $F(\vec{r}(t)) = (0, 0, -1)^T$.
2. On calcule le vecteur tangent à S . On a

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. On calcule $F \bullet \vec{r}'$. On a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} = -1.$$

4. On calcule le travail. On a

$$\begin{aligned} E &= \int_S F \bullet d\vec{s} \\ &= \int_0^{4\pi} F(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{4\pi} -1 dt = -4\pi. \end{aligned}$$

Exemple 2.3.11. Soit C le cercle unité et soit $F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Calculons le travail de F sur C .

1. On paramétrise C par $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. On calcule son vecteur tangent : $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$.
2. On calcule $F \circ \gamma$. On a

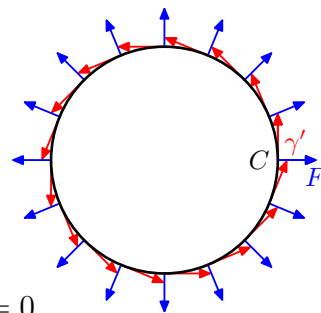
$$F \circ \gamma(t) = F(\cos t, \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

3. On calcule $F(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)$. On a

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = -\cos t \sin t + \sin t \cos t = 0.$$

4. On calcule $\int_C F \bullet d\vec{s}$. On a

$$\int_C F \bullet d\vec{s} = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0.$$



Le travail est nul. En fait, on voit que la force est perpendiculaire à la direction du déplacement à tout moment (c'est le calcul du point 3).

Circulation. On appelle aussi $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{s}$ la circulation de \vec{F} le long de C . En réarrangeant l'intégrande, on trouve

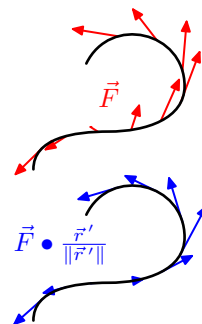
$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \bullet \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

La quantité

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \bullet \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

c'est la grandeur de la composante de \vec{F} dans la direction \vec{r}' . Puisque \vec{r}' est parallèle à la courbe, c'est donc la composante de \vec{F} parallèle à la courbe.

L'intégrale curviligne s'interprète donc comme une sorte de moyenne de la composante de \vec{F} dans la direction de la courbe le long de la courbe.



Exemple 2.3.12. Soit $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On considère le système d'EDO

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{\partial h}{\partial y}(x(t), y(t)), \\ y'(t) = -\frac{\partial h}{\partial x}(x(t), y(t)). \end{cases}$$

Montrer que la circulation de ∇h le long de toutes les solutions est nul.

Supposons que la courbe C donnée par $(x(t), y(t))$ soit un solution du système, pour $t \in [a, b]$. On a alors

$$(x'(t), y'(t)) \bullet \nabla h(x(t), y(t)) = \left(\frac{\partial h}{\partial y}, -\frac{\partial h}{\partial x} \right) \bullet \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0.$$

Ainsi, on voit que

$$\int_C \nabla h \bullet d\vec{s} = \int_a^b \nabla h \bullet (x'(t), y'(t)) dt = 0.$$

En fait, les courbes de niveau de h sont les lignes de courant de l'EDO. Comme le gradient est orthogonal aux courbes de niveau, il est naturel que cette intégrale curviligne soit nulle.

Primitive. On considère cette fois un champ scalaire $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$) et une courbe C dans \mathbb{R}^n paramétrée par \vec{r} . La composée $f \circ \vec{r}$ correspond au champ scalaire sur la courbe. (P.ex. si f est la température, alors $f \circ \vec{r}$ est la température sur C .) Si l'on dérive la composée, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f \circ \vec{r}(t) &= \frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) \\ &= \nabla f(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}'(t). \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'intégrale curviligne correspond à l'opération inverse de la dérivée. En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_C \nabla f \bullet d\vec{s} &= \int_a^b \nabla f(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (f \circ \vec{r})(t) dt \\ &= f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)). \end{aligned}$$

Dans cette optique, le champ scalaire f est une primitive du champ de vecteurs ∇f .

Exemple 2.3.13. Soit le champ scalaire $f(x, y, z) = xyz$. Soit C la courbe joignant $\vec{a} = (1, 1, 1)^T$ à $\vec{b} = (2, 2, 2)^T$ par un arc de cercle de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$ contenu dans le plan passant par \vec{a} , \vec{b} et $\vec{0}$. Calculer $\int_C \nabla f \bullet d\vec{s}$.

Il y a deux arcs de cercle possible qui peuvent joindre \vec{a} et \vec{b} , mais comme on le verra, ce n'est pas important quel arc on prend. On a

$$\int_C \nabla f \bullet d\vec{s} = f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 8 - 1 = 7.$$

Exemple 2.3.14. Soit le champ de vecteurs $F(x, y) = (-2y, 2x)$. Soit C la spirale d'équation polaire $r(\theta) = \theta^2$. Calculer $\int_C F \bullet d\vec{s}$, où $\theta \in [0, 2\pi]$.

Essayons de trouver une fonction scalaire f telle que $\nabla f = F$. Pour ce faire, on doit avoir $(f_x, f_y) = (2y, 2x)$, donc

$$f(x, y) = \int f_x(x) dx = \int 2y dx = 2xy + h(y).$$

On dérive cette équation par rapport à y pour obtenir

$$f_y = 2x + h'(y).$$

On doit aussi avoir $f_y = 2x$, donc en combinant, on a

$$h'(y) = 0.$$

Ainsi, on peut prendre $f(x, y) = 2xy + D$ et on voit que $\nabla f = (2y, 2x)$ comme voulu. Enfin, pour calculer l'intégrale, on a

$$\int_C F \bullet d\vec{s} = \int_C \nabla f \bullet d\vec{s} = f(\vec{b}) - f(\vec{a}).$$

Ici, \vec{a} correspond à $\theta = 0$, donc $\vec{a} = \vec{0}$. Ensuite, \vec{b} correspond à $\theta = 2\pi$, donc

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4\pi^2 \cos(2\pi) \\ 4\pi^2 \sin(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\pi^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = f(4\pi^2, 0) - f(0, 0) = 2(4\pi^2) \cdot 0 - 0 = 0.$$

2.3.5 Propriétés de l'intégrale curviligne

Théorème 2.3.5. Soit une courbe C de classe C^1 et deux paramétrages C^1 -équivalents $\vec{r}_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{r}_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de C . Soit $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continue, où $C \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors on a

$$\int_C F \bullet d\vec{r}_1 = \int_C F \bullet d\vec{r}_2,$$

c'est-à-dire que l'intégrale curviligne est indépendante du choix de paramétrage.

Démonstration. Comme \vec{r}_1 et \vec{r}_2 sont C^1 équivalentes, il existe un changement de paramètre $u = v(t)$ tel que $v(a) = c$, $v(b) = d$, $v'(t) > 0$ et

$$\vec{r}_2(v(t)) = \vec{r}_1(t) \Rightarrow \vec{r}_2'(v(t))v'(t) = \vec{r}_1'(t).$$

On a

$$\begin{aligned} \int_C F \bullet d\vec{r}_1 &= \int_a^b F(\vec{r}_1(t)) \bullet \vec{r}_1'(t) dt \\ &= \int_a^b F(\vec{r}_2(v(t))) \bullet \vec{r}_2'(v(t)) v'(t) dt \\ &= \int_c^d F(\vec{r}_2(u)) \bullet \vec{r}_2'(u) du \\ &= \int_C F \bullet d\vec{r}_2. \end{aligned}$$

$u = v(t)$
 $du = v'(t)dt$

□

Étant donné une courbe C entre le point \vec{a} et \vec{b} parcourue de \vec{a} à \vec{b} , on notera par $-C$ cette même courbe, mais parcourue dans sens opposé, c'est-à-dire de \vec{b} à \vec{a} . Si $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un paramétrage de C , alors $-C$ est paramétrée par $\vec{R}: [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^n$, défini par $\vec{R}(t) := \vec{r}(-t)$.

Théorème 2.3.6. Soit C une courbe de classe C^1 et F un champ de vecteurs continue. On a

$$\int_C F \bullet d\vec{s} = - \int_{-C} F \bullet d\vec{s}.$$

Démonstration. Soit $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un paramétrage de C . Soit \vec{R} défini par $\vec{R}(t) := \vec{r}(-t)$. On a

$$\vec{R}'(t) = -\vec{r}'(t).$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \int_C F \bullet d\vec{s} &= \int_a^b F(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b F(\vec{R}(-t)) \bullet (-\vec{R}'(-t)) dt \\ &= \int_{-a}^{-b} F(\vec{R}(u)) \bullet \vec{R}'(u) du \\ &= - \int_{-b}^{-a} F(\vec{R}(u)) \bullet \vec{R}'(u) du \\ &= - \int_{-C} F \bullet d\vec{R}. \end{aligned}$$

$u = -t$
 $du = -dt$

□

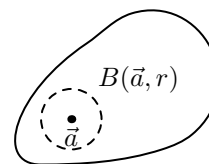
2.3.6 Indépendance du chemin et champs conservatifs

On commence avec un peu de topologie.

Définition 2.3.7. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$. On dit que D est *ouvert* si pour $\vec{a} \in D$, il existe $r > 0$ telle que $B(\vec{a}, r) \subseteq D$, où

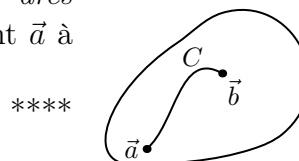
$$B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n ; \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$$

est la boule ouverte centrée en \vec{a} de rayon r .

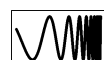


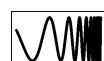
Remarque. Dans \mathbb{R}^3 , une boule ouverte correspond au volume à l'intérieur d'une sphère (mais sans la frontière). Dans \mathbb{R}^2 , une boule ouverte correspond à un disque, mais sans la frontière. Dans \mathbb{R} , une boule ouverte correspond à un intervalle borné et ouvert (ou \mathbb{R} au complet, qui est une boule de rayon infini).

Définition 2.3.8. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$. On dit que D est *connexe par arcs* si pour tout \vec{b} et \vec{a} dans D , il existe une courbe $C \subset D$ joignant \vec{a} à \vec{b} .



Définition 2.3.9. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$. On dit que D est un *domaine* si D est ouvert et connexe par arcs.

 *Remarque.* En fait, on définit habituellement un domaine comme étant un ensemble ouvert et connexe. Il s'avère qu'un ouvert connexe est aussi connexe par arcs dans \mathbb{R}^n , donc les définitions sont équivalentes, mais à priori celle demandant la connexité aurait pu être plus faible.

 *Remarque.* On se doit de faire une remarque sur la régularité des courbes. Dans la définition d'un domaine, on demande la connexité par arcs, mais pour intégrer, il faudra que les courbes soient de classe C^1 . En fait, on peut montrer qu'un domaine de \mathbb{R}^n est connexe par arcs polygonaux (donc toute paire de points est reliée par un nombre fini de segments de droite bout-à-bout), ce qui est suffisant car on peut intégrer sur les arcs polygonaux.

Pour trouver un arc polygonal, on regarde une courbe entre \vec{a} et \vec{b} . Ensuite, on recouvre cette courbe par des boules ouvertes. La compacité de la courbe nous permet d'obtenir un recouvrement fini de boules ouvertes. Dans chaque boule, il est aisé de remplacer la courbe originale par un segment de droite.

On peut maintenant passer au cœur du sujet.

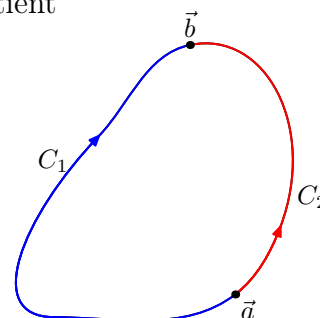
Définition 2.3.10. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un domaine ($n = 2$ ou 3). Un champ de vecteurs $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ possède la *propriété d'indépendance du chemin* (PIC) si pour tout $\vec{a}, \vec{b} \in D$ et pour toute courbe $C_1, C_2 \subset D$ de classe C^1 allant de \vec{a} à \vec{b} , on a

$$\int_{C_1} F \bullet d\vec{s} = \int_{C_2} F \bullet d\vec{s}.$$

Proposition 2.3.11. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un domaine et soit $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs. Alors F a la propriété d'indépendance du chemin si et seulement si $\int_C F \bullet d\vec{s} = 0$ pour toute courbe fermée C de classe C^1 .

Démonstration. \Rightarrow) Supposons que F a la propriété d'indépendance du chemin. Soit C une courbe fermée et soit \vec{a} et \vec{b} deux points distincts de C . On peut décomposer C en deux courbes C_1 et C_2 allant \vec{a} à \vec{b} de sorte que $C = (-C_1) \cup C_2$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_C F \bullet d\vec{s} &= \int_{-C_1 \cup C_2} F \bullet d\vec{s} \\ &= \int_{-C_1} F \bullet d\vec{s} + \int_{C_2} F \bullet d\vec{s} \\ &= - \int_{C_1} F \bullet d\vec{s} + \int_{C_2} F \bullet d\vec{s} \\ &= 0. \end{aligned}$$



⇐) Même philosophie. □

On a déjà vu qu'un champ scalaire f est la primitive de son gradient ∇f . On verra au prochain théorème qu'un tel champ de vecteurs à la propriété d'indépendance du chemin.

Définition 2.3.12. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un domaine ($n = 2$ ou 3). Un champ de vecteurs $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dit *conservatif* s'il existe un champ scalaire $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $F = \nabla f$. ****

Théorème 2.3.13. Un champ de vecteurs sur domaine $D \subseteq \mathbb{R}^n$ est conservatif si et seulement si il possède la propriété d'indépendance de chemin.

Démonstration. ⇒) Soit $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs. Supposons qu'il soit conservatif. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire tel que $F = \nabla f$. Pour toute courbe \vec{r} , on a

$$\frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = \nabla f(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}'(t).$$

Ainsi, pour une courbe fermée C paramétrée par \vec{r} , on a

$$\int_C F \bullet d\vec{s} = \int_a^b \nabla f(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f \circ \vec{r}(t) dt = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)) = 0,$$

car $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, puisque la courbe est fermée.

⇐) La réciproque est un peu plus difficile. On fait la démonstration dans \mathbb{R}^3 , mais c'est le même principe dans \mathbb{R}^2 (et même dans \mathbb{R}^n). Supposons que F ait la propriété d'indépendance du chemin. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in D$ un point fixé. On définit la fonction scalaire suivante

$$f(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} F \bullet d\vec{s},$$

où l'intégrale curviligne est prise sur n'importe quelle courbe C joignant (x_0, y_0, z_0) à (x, y, z) dans D . Cette fonction est bien définie, car F possède la propriété d'indépendance du chemin. On veut montrer que $\nabla f = F$.

Soit $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si petit que $(x + h, y, z)$ est toujours dans D . Ceci est possible, car D est ouvert. Soit C une courbe joignant (x_0, y_0, z_0) à (x, y, z) et soit S la courbe joignant (x, y, z) à $(x + h, y, z)$ donnée par

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x + t \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad t \in [0, h].$$

On a

$$\begin{aligned} f(x + h, y, z) - f(x, y, z) &= \int_{C \cup S} F \bullet d\vec{s} - \int_C F \bullet d\vec{s} \\ &= \int_S F \bullet d\vec{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^h F(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}'(t) dt \\
&= \int_0^h F(x+t, y, z) \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^h F_1(x+t, y, z) dt,
\end{aligned}$$

où F_1 est la première composante de F . Il suit que

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h F_1(x+t, y, z) dt = F_1(x, y, z),$$

par le théorème fondamental du calcul.

On voit de la même façon que $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = F_3$, d'où $\nabla f = F$, comme voulu. □

On a déjà vu que le rotationnel d'un gradient est toujours nul. Ainsi, le rotationnel d'un champ conservatif est nul. La réciproque est-elle vraie ?

Proposition 2.3.14. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un domaine et soit $F: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs. Si F est conservatif, alors $\text{rot}(F) = \vec{0}$. La réciproque est fautive.

Démonstration. Si F est conservatif, alors il existe $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F = \nabla f$. Un simple calcul montre que $\text{rot}(\nabla f) = \vec{0}$.

Pour montrer que la réciproque est fautive, on présente le contre-exemple suivant. On prend le champ de vecteur

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

défini sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. On a

$$\text{rot}(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{x^2+y^2-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-(x^2+y^2)+y(2y)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Or, F n'a pas la propriété d'indépendance du chemin. En effet, on considère la courbe

$$r(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)^T$ et

$$F(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'intégrale curviligne donne

$$\int_{\vec{r}} F \bullet d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

□

Exercice 9. *Indice d'une courbe selon un champ de vecteurs.*

Soit $\vec{v}(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))^T$ un champ de vecteurs du plan. On note les dérivées partielles de v_j par v_{jx} et v_{jy} . Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe de classe C^1 . On définit l'indice de γ selon \vec{v} par

$$\text{Ind}(\gamma, \vec{v}) = \int_{\gamma} \left(\frac{v_{2x}v_1 - v_2v_{1x}}{v_1^2 + v_2^2}, \frac{v_{2y}v_1 - v_2v_{1y}}{v_1^2 + v_2^2} \right) \bullet d\vec{r}.$$

1. a) Soit $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ le cercle unité. Calculer l'indice de γ selon le champ $\vec{v} = (x, y)$.
 b) Soit $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $x^3 = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Calculer l'indice de γ selon le champ $\vec{v} = (x^3, y)$.
2. Calculer $\nabla \arctan\left(\frac{v_2(x, y)}{v_1(x, y)}\right)$.
3. Rappelons que $\arctan\left(\frac{v_2(x, y)}{v_1(x, y)}\right)$ donne l'angle entre \vec{v} et l'horizontale. Donner une interprétation de l'indice d'une courbe.

2.3.7 Intégrale de flux

Le dernier type d'intégrale étudié est l'intégrale de flux, définie sur les surfaces. L'idée est semblable à l'intégrale curviligne : étant donné un champ de vecteurs \vec{F} défini sur une surface S , on peut définir un champ scalaire en prenant le produit scalaire avec une direction. La direction en question sera la normale à la surface.

On fait immédiatement face à un problème : il y a deux sens au vecteur normal, soit \vec{N} et $-\vec{N}$. Il faudra donc faire un choix cohérent sur toute la surface entre \vec{N} et $-\vec{N}$ pour calculer la composante de \vec{F} dans la direction de la normale. On appelle ce choix une *orientation*.

Définition 2.3.15. 1. Soit Γ une surface régulière paramétrée par $\Sigma: E \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 . Une *orientation* de Γ est une fonction continue $\vec{n}: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\vec{n}(u, v)$ est orthogonale à S et $\|\vec{n}(u, v)\| = 1$.

2. Lorsqu'il existe une orientation sur une surface, on dit que c'est une *surface orientable*. Sinon, on dit que c'est une *surface non orientable*.

Exemple 2.3.15. Surface orientable. La sphère possède les deux orientations suivantes :

1. \vec{n} est le vecteur normal unitaire qui pointe à l'extérieur de la sphère en tout point ;
2. \vec{n} est le vecteur normal unitaire qui pointe à l'intérieur de la sphère en tout point.

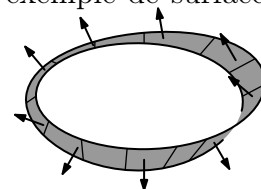
Si on définit \vec{n} comme le vecteur normal qui pointe à l'intérieur sur l'hémisphère nord et l'équateur et qui pointe à l'extérieur sur l'hémisphère sud, alors \vec{n} n'est pas continue. Ce n'est donc pas une orientation.

Toutes les surfaces qui interviendront pour le cours seront orientables. Ceci comprend les graphes de fonctions et les surfaces algébriques.

Voici toutefois un exemple d'une surface non orientable.

Exemple 2.3.16. Surface non orientable. Le *ruban de Möbius* est un exemple de surface non orientable. C'est la surface

$$\Gamma(\theta, s) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \theta \\ \sin \theta \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$



Elle est non orientable, puisque en « faisant le tour de la surface », on se retrouve sur l'autre face. Il est donc impossible qu'un choix de vecteurs normaux soit continue.

Soit Γ une surface paramétrée par $\Sigma: E \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 et soit \vec{n} une orientation de Γ . Puisque \vec{n} est normal à Γ , il suit que \vec{n} est linéairement dépendant de \vec{N} , le vecteur normal. On a donc que

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} \quad \text{ou} \quad \vec{n} = -\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|},$$

selon l'orientation choisie. Supposons qu'on se trouve dans le premier cas.

On peut parler de la composante de \vec{F} perpendiculaire à la surface, c'est-à-dire

$$\vec{F} \bullet \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \vec{F} \bullet \vec{n}.$$

La composante de \vec{F} perpendiculaire à la surface est vue comme la « quantité de \vec{F} qui traverse directement la surface ». On parle du flux de \vec{F} au travers Γ ; on imagine que \vec{F} modélise le mouvement d'une entité dans le plan ou l'espace. La fonction $(u, v) \mapsto \vec{F}(\Sigma(u, v)) \bullet \vec{n}(\Sigma(u, v))$ est un champ scalaire sur Γ , donc on peut l'intégrer comme on l'a vu à la section 2.3.1. Ainsi, pour trouver le flux moyen de \vec{F} à travers Γ , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Aire}(\Gamma)} \int_{\Gamma} \vec{F} \bullet \vec{n} dS &= \frac{1}{\text{Aire}(\Gamma)} \iint_E \vec{F}(\Sigma(u, v)) \bullet \vec{n}(u, v) \|\vec{N}(u, v)\| \, dudv \\ &= \frac{1}{\text{Aire}(\Gamma)} \iint_E \vec{F}(\Sigma(u, v)) \bullet \frac{\vec{N}(u, v)}{\|\vec{N}(u, v)\|} \|\vec{N}(u, v)\| \, dudv \\ &= \frac{1}{\text{Aire}(\Gamma)} \iint_E \vec{F}(\Sigma(u, v)) \bullet \vec{N}(u, v) \, dudv. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale joue un rôle si important qu'on lui donne une notation et un nom spécial.

Définition 2.3.16. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un domaine. Soit $\Gamma \subseteq D$ une surface paramétrée par $\Sigma: E \rightarrow D$ de classe C^1 , où $E \subset \mathbb{R}^2$. Soit \vec{n} une orientation telle que $\vec{n} = \vec{N}/\|\vec{N}\|$. Soit $\vec{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs continue. On définit le *flux de \vec{F} à travers Γ* par

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \bullet d\vec{S} := \iint_E \vec{F}(\Sigma(u, v)) \bullet \vec{N}(u, v) \, dudv.$$

On appelle cette intégrale l'*intégrale de flux*.

Notation. On rappelle que le vecteur normal d'une surface Γ paramétrée par $\Sigma: E \rightarrow \mathbb{R}^3$ est

$$\vec{N}(u, v) = \vec{T}_u(u, v) \times \vec{T}_v(u, v) = \frac{\partial \Sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Sigma}{\partial v}(u, v).$$

On notera dorénavant le vecteur normal unitaire par

$$\vec{n} := \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}.$$

Puisque $dS = \|\vec{N}\|dudv$, on utilisera la notation

$$d\vec{S} := \vec{N}dudv.$$

C'est pourquoi on note l'intégrale de flux par

$$\int_{\Gamma} F \bullet d\vec{S} = \int_{\Gamma} F \bullet \vec{n}dS = \iint_E \vec{F}(\Sigma(u, v)) \bullet \vec{N}(u, v) dudv.$$

Exemple 2.3.17. Soit la sphère de rayon 1 centrée à l'origine. On considère le champ de vecteur

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Calculer le flux de \vec{F} à travers la sphère qui sort de la sphère.

1. Paramétrer. On paramétrise, comme à l'habitude, la sphère par

$$\Sigma(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

2. Orientation. Le vecteur normal a déjà été calculé. On a

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos^2 \varphi \\ \sin \theta \cos^2 \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

L'orientation revient à choisir si l'on veut \vec{N} ou $-\vec{N}$. Comme le problème demande le flux qui sort de la sphère, on doit s'assurer de prendre le vecteur normal qui pointe à l'extérieur de la sphère. Comme \vec{N} est continue, il suffit de vérifier en un point que c'est la cas. On a, par exemple,

$$\vec{N}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur pointe bien à l'extérieur de la sphère.

3. Calcul de $F \circ \Sigma$. On a

$$F \circ \Sigma(\theta, \varphi) = F(\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \sin \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

4. Calcul de $\vec{F} \bullet \vec{N}$. On a

$$\begin{aligned} \vec{F} \bullet \vec{N} &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos \theta \cos^2 \varphi \\ \sin \theta \cos^2 \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= \cos^2 \theta \cos^3 \varphi + \sin^2 \theta \cos^3 \varphi + \cos \varphi \sin^2 \varphi \\ &= \cos^3 \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \cos \varphi \sin^2 \varphi \\ &= \cos^3 \varphi + \cos \varphi \sin^2 \varphi \\ &= \cos \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\ &= \cos \varphi. \end{aligned}$$

5. Calcul du flux. On a

$$\begin{aligned} \int_S F \bullet d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\Sigma(\theta, \varphi)) \bullet \vec{N}(u, v) du d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \\ &= 2\pi \sin \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

2.3.8 Propriété de l'intégrale de flux

Théorème 2.3.17. *L'intégrale de flux à travers une surface ne dépend pas du paramétrage de classe C^1 choisi.*

Démonstration. Soit S une surface de \mathbb{R}^3 de classe C^1 . Soit $A \subset \mathbb{R}^3$ un domaine \mathbb{R}^3 tel que $S \subset A$. Soit $\vec{G}: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de continue.

Soit $D, E \subset \mathbb{R}^2$ deux domaines et soit $\Sigma: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\Gamma: E \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux paramétrages C^1 -équivalents. Soit $T: D \rightarrow E$ une application bijective, de classe C^1 et telle que $\det \text{Jac}_{\vec{x}} T > 0$ pour tout $\vec{x} \in D$, le changement de paramétrage :

$$\Sigma_2 \circ T = \Sigma_1.$$

Les calculs ont déjà été fait à la démonstration du théorème 2.2.27 ; on trouve

$$\vec{N}_1 = \det(\text{Jac } T) \vec{N}_2.$$

Le résultat suit du calcul suivant :

$$\begin{aligned} \int_S \vec{G} \bullet d\vec{S} &= \iint_D G(\Sigma_1(u, v)) \bullet \vec{N}_1(u, v) \, dudv \\ &= \iint_D G(\Sigma_2 \circ T(u, v)) \bullet \vec{N}_2(T(u, v)) \det(\text{Jac } T) \, dudv \\ &= \iint_E G(\Sigma_2(s, t)) \bullet \vec{N}_2(s, t) \, dsdt, \end{aligned} \quad \boxed{\begin{array}{l} (s, t) = T(u, v) \\ dsdt = \det(\text{Jac } T) \, dudv \end{array}}$$

tel que voulu. □

2.4. Analyse vectoriel

Tous les outils sont maintenant en place. Il est grand temps de passer aux théorèmes fondamentaux du calcul vectoriel. Le but des prochaines sections est d'adapter le théorème fondamental du calcul aux intégrales que l'on a définies précédemment.

Afin de mettre les idées en place, commençons par un retour sur les intégrales itérées.

2.4.1 Rappel : les intégrales itérées

Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle dans \mathbb{R}^2 (ou même \mathbb{R}^n). Soit $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Rappelons que l'intégrale de f sur R est équivalente à l'intégrale double itérée

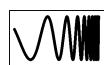
$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy. \quad (*)$$

Si F est une primitive de f par rapport à x , c'est-à-dire que $\frac{\partial F}{\partial x} = f$, alors le théorème fondamentale du calcul nous donne

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy = \int_c^d (F(b, y) - F(a, y)) \, dy.$$

L'intégrale double est donc devenue une intégrale simple.

Voici l'heuristique : ces intégrales itérées sont essentiellement les *seules intégrales* que l'on sait calculer à la main. Le but du théorème de Green est d'étendre cette méthodologie : trouver une intégrale simple équivalente à l'intégrale double du départ, quitte à devoir intégrer une fonction différente.



Il est rare que dans un premier cours de calcul de fonctions de plusieurs variables on montre l'équation (*). On le montre donc ici ; la démonstration utilise les sommes de Riemann, ce qui est la raison pourquoi ce segment est à part.

Lemme 2.4.1. Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle dans \mathbb{R}^2 et soit $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors on a

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy. \quad (*)$$

Démonstration. Soit $A = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ une partition de $[a, b]$ et soit $D = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d\}$ une partition de $[c, d]$. Une partition de R en rectangles s'écrit $P = A \times D = \{(x_i, y_j) \mid 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$ pour des partitions A et D . (Ceci est une propriété du rectangle; c'est ce qui rend la démonstration possible dans le cas d'un rectangle comparé à d'autres types de domaines.)

Soit $\mathcal{P} = \{P \mid \text{partitions de } R\}$. Une partition P est simplement un nombre fini de points $(x_i, y_j) \in R$ ordonné de sorte que $x_m < x_n$ et $y_m < y_n$ si $m < n$. Il est seulement nécessaire de considérer les partitions en rectangle, car pour une partition quelconque P , on peut trouver une partition en rectangle P_R par

$$P_R = \{(x_i, y_j) \mid \exists x, (x, y_j) \in P \text{ et } \exists y, (x_i, y) \in P\}.$$

Pour chaque point (x_i, y_j) , on peut définir le rectangle R_{ij} de sommets (x_i, y_j) , (x_{i+1}, y_j) , (x_i, y_{j+1}) et (x_{i+1}, y_{j+1}) . Pour une fonction intégrable (donc bornée), l'intégrale est donnée par

$$\iint_R f(x, y) dA = \inf_{P \in \mathcal{P}} \sum_{(x_i, y_j) \in P} \left(\sup_{(x, y) \in R_{ij}} f(x, y) \right) \text{Aire}(R_{ij}).$$

Il suffit de montrer que

1. $\sup_{(x, y) \in R_{ij}} f(x, y) = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \sup_{y \in [y_j, y_{j+1}]} f(x, y)$.
2. $\sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \sup_{y \in [y_j, y_{j+1}]} f(x, y) = \sup_{y \in [y_j, y_{j+1}]} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x, y)$.

Ceci se voit sans difficulté. Pour le 1., on a

$$f(x, y) \leq \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \sup_{y \in [y_j, y_{j+1}]} f(x, y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in R_{ij},$$

$$f(x, y) \leq \sup_{(x, y) \in R_{ij}} f(x, y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in R_{ij}.$$

De la première ligne, on a

$$\sup_{(x, y) \in R_{ij}} f(x, y) \leq \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \sup_{y \in [y_j, y_{j+1}]} f(x, y)$$

et de la seconde, on a

$$\sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \sup_{y \in [y_j, y_{j+1}]} f(x, y) \leq \sup_{(x, y) \in R_{ij}} f(x, y).$$

Pour le 2, la même astuce fonctionne.

Enfin, pour obtenir le résultat, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{(x_i, y_j) \in P} \left(\sup_{(x, y) \in R_{ij}} f(x, y) \right) \text{Aire}(R_{ij}) \\ &= \sum_{(x_i, y_j) \in A \times D} \left(\sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \sup_{y \in [y_j, y_{j+1}]} f(x, y) \right) \text{Aire}([x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]) \\ &= \sum_{(x_i \in A)} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \sum_{y_j \in D} \sup_{y \in [y_j, y_{j+1}]} f(x, y) \Delta y \Delta x, \end{aligned}$$

d'où

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

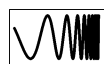
Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{(x_i, y_j) \in P} \left(\sup_{(x, y) \in R_{ij}} f(x, y) \right) \text{Aire}(R_{ij}) &= \sum_{(x_i, y_j) \in A \times D} \left(\sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \sup_{y \in [y_j, y_{j+1}]} f(x, y) \right) \text{Aire}([x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]) \\
 &= \sum_{(y_j \in D)} \sup_{y \in [y_j, y_{j+1}]} \sum_{x_i \in A} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x, y) \Delta x \Delta y, \\
 &= \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.
 \end{aligned}$$

□

2.4.2 Théorème de Green

Définition 2.4.2. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine. La *frontière* de D , notée ∂D , est l'ensemble des points atteignables à partir de D et à partir du complément de D .



Remarque. On entend par *atteignable*, dans la définition précédente, pour un point x qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ qui tend vers x et une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2 \setminus D$ qui tend vers x .

En pratique, pour le cours, la frontière d'un domaine sera une courbe régulière ou un nombre fini de courbes régulières qui bornent le domaine.

Exemple 2.4.1. La frontière du disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ est le cercle $x^2 + y^2 = 1$.

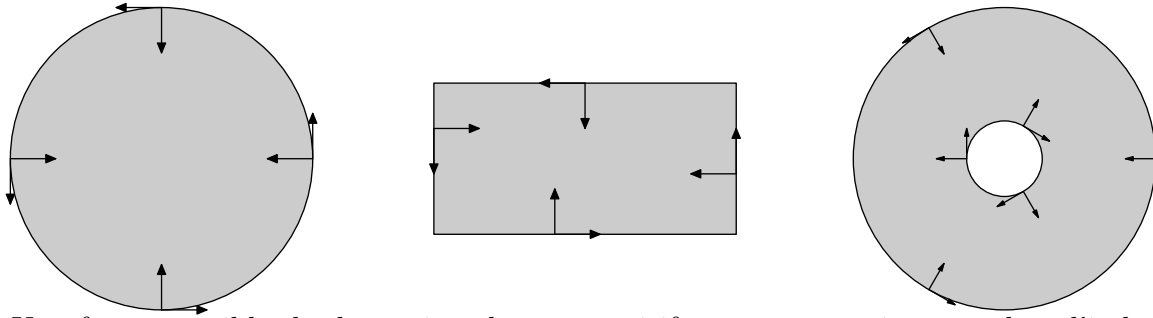
Le frontière d'un rectangle plein est le rectangle qui le contient.

La frontière d'un anneau est composée du petit cercle et du grand cercle qui le délimite.

Définition 2.4.3. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine. Supposons que la frontière de D , ∂D , soit composée d'un nombre fini de courbes simples régulières $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. On dit que D a une *orientation positive* si chaque γ_j est parcourue dans le sens qui est tel que D se trouve à gauche de γ_j .

Exemple 2.4.2. Le disque unité a une orientation positive si le cercle est parcouru dans le sens antihoraire. De même pour un rectangle.

Un anneau a une orientation positive si le petit cercle est parcouru dans le sens horaire et le grand cercle est parcouru dans le sens antihoraire.



Une façon possible de déterminer le sens positif est comme suit : on place l'index de la main droite sur la courbe dans la direction de la tangente, si, en ouvrant le pouce, celui pointe dans D , alors l'orientation est positive.

Définition 2.4.4. 1. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine. On dit qu'il est de *type-I* s'il existe deux fonctions $y_1 = f(x)$ et $y_2 = g(x)$ définies sur $[a, b]$ telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ et

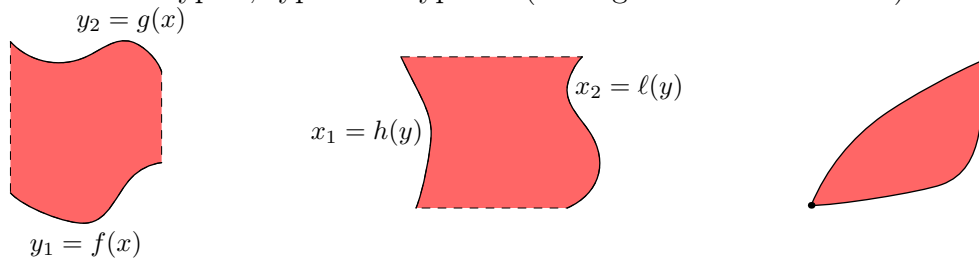
$$D = \{(x, y) \mid x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

2. On dit que D est de *type-II* s'il existe deux fonctions $x_1 = h(y)$ et $x_2 = \ell(y)$ définies sur $[c, d]$ telles que $h(y) \leq \ell(y)$ pour tout y et

$$D = \{(x, y) \mid y \in [c, d], h(y) \leq x \leq \ell(y)\}.$$

3. On dit que D est de *type-III* si D est de type-I et de type-II.

Des domaines de type-I, type-II et type-III (de la gauche vers la droite).



Théorème de Green 2.4.5. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné du plan dont la frontière ∂D est composée d'un nombre fini de courbes régulières orientées positivement. Si $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ est un champ de vecteurs de classe C^1 sur D et continue sur $\bar{D} = D \cup \partial D$, alors on a

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot ds = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Le théorème fondamental du calcul 2 dit que

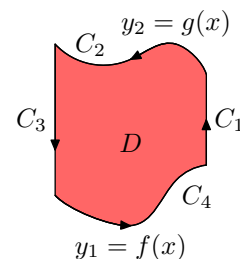
$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a),$$

où f' est continue. On passe donc d'une intégrale simple à aucune intégrale à l'aide d'une primitive. Le théorème de Green est une généralisation : on passe d'une intégrale double à une intégrale simple et le champ de vecteur \vec{F} joue le rôle de la primitive de $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$.

Démonstration. La démonstration se fait en trois étapes. On montre d'abord que le théorème est vrai sur des domaines de type-I ou de type-II. Ensuite, on montre que le théorème est vrai sur un domaine D qui s'écrit comme la réunion d'un nombre fini de domaines de type-I et de type-II qui s'intersectent sur leur frontière. Enfin, on montre qu'un domaine tel que dans l'énoncé se décompose en un nombre fini de domaines de type-I et de type-II qui s'intersectent le long de leur frontière. L'étape trois dépasse le contenu du cours.

Étape 1. On suppose que D est de type-I. Le cas de type-II se fait de la même manière. On suppose que ∂D se décompose en quatre courbes comme sur la figure, à l'aide des fonctions $y_1 = f(x)$ et $y_2 = g(x)$ définies sur l'intervalle $[a, b]$ telles que $f(x) \leq g(x)$.

On calcule l'intégrale curviligne sur C_1, \dots, C_4 séparément. On a



$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} \cdot ds &= \int_{f(b)}^{g(b)} \begin{pmatrix} P(b, y) \\ Q(b, y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dy \\ &= \int_{f(b)}^{g(b)} Q(b, y) dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_3} \vec{F} \cdot ds &= \int_{g(a)}^{f(a)} \begin{pmatrix} P(a, y) \\ Q(a, y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dy \\ &= - \int_{f(a)}^{g(a)} Q(a, y) dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \vec{F} \cdot ds &= \int_b^a \begin{pmatrix} P(x, g(x)) \\ Q(x, g(x)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix} dx \\ &= - \int_a^b \left(P(x, g(x)) + Q(x, g(x))g'(x) \right) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_4} \vec{F} \cdot ds &= \int_a^b \begin{pmatrix} P(x, f(x)) \\ Q(x, f(x)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} dx \\ &= \int_a^b \left(P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x) \right) dx. \end{aligned}$$

En combinant ces quatre intégrales, on a

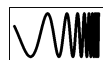
$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \vec{F} \bullet ds &= \int_a^b \left(P(x, f(x)) - P(x, g(x)) \right) dx \\ &\quad + \int_a^b \left(Q(x, f(x))f'(x) - Q(x, f(x))g'(x) \right) dx \\ &\quad + \int_{f(b)}^{g(b)} Q(b, y)dy - \int_{f(a)}^{g(a)} Q(a, y)dy. \end{aligned}$$

D'abord, notons que

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(P(x, f(x)) - P(x, g(x)) \right) dx &= \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx \\ &= - \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx \end{aligned}$$

par le théorème fondamental du calcul. Il reste à montrer que

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left(Q(x, f(x))f'(x) - Q(x, f(x))g'(x) \right) dx \\ &\quad + \int_{f(b)}^{g(b)} Q(b, y)dy - \int_{f(a)}^{g(a)} Q(a, y)dy \\ &= \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy dx. \end{aligned}$$

 On pose

$$R(x, y) := \int_a^y Q(x, t) dt.$$

C'est une primitive de Q par rapport à y . On pose également

$$G(x) := \int_{f(x)}^{g(x)} Q(x, y) dy.$$

On calcule la dérivée de G . On a

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{f(x)}^{g(x)} Q(x, y) dy \\ &= \frac{d}{dx} \left(R(x, g(x)) - R(x, f(x)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R_x(x, g(x)) + R_y(x, g(x))g'(x) - R_x(x, f(x)) - R_y(x, f(x))f'(x) \\
&= R_x(x, g(x)) - R_x(x, f(x)) + Q(x, g(x))g'(x) - Q(x, f(x))f'(x) \\
&= \int_{f(x)}^{g(x)} R_{xy}(x, y)dy + Q(x, g(x))g'(x) - Q(x, f(x))f'(x) \\
&= \int_{f(x)}^{g(x)} Q_x(x, y)dy + Q(x, g(x))g'(x) - Q(x, f(x))f'(x) \quad (\text{car } R_{xy} = R_{yx}).
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b G'(x)dx &= G(b) - G(a) \\
&= \int_{f(b)}^{g(b)} Q(b, y)dy - \int_{f(a)}^{g(a)} Q(a, y)dy,
\end{aligned}$$

ainsi que

$$\int_a^b G'(x)dx = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} Q_x(x, y)dy + \int_a^b \left(Q(x, g(x))g'(x) - Q(x, f(x))f'(x) \right) dx.$$

En réarrangeant les termes, on trouve

$$\int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} Q_x(x, y)dy = \int_a^b \left(Q(x, f(x))f'(x) - Q(x, g(x))g'(x) \right) dx + \int_{f(b)}^{g(b)} Q(b, y)dy - \int_{f(a)}^{g(a)} Q(a, y)dy,$$

comme voulu.

En combinant les équations, on obtient

$$\int_{\partial D} \vec{F} \bullet ds = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) \right) dy dx = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) \right) dA.$$

Étape 2. Supposons que D soit un domaine de la forme

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i,$$

où D_i est un domaine de type-I ou de type-II et D_i et D_j ne s'intersectent pas ou bien s'intersectent seulement sur leur frontière.

On doit montrer que

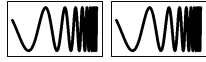
$$\int_{\partial D} \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_{\cup_i \partial D_i} \vec{F} \bullet d\vec{s} = \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i} \vec{F} \bullet d\vec{s}. \quad (*)$$

Supposons que D_i et D_j s'intersectent le long d'une courbe γ_k avec une orientation donnée. Sans perte de généralité, supposons que D_i se trouve à gauche de γ_k selon cette orientation. Comme D_j ne peut pas se trouver lui aussi à gauche, il doit se trouver à droite de γ_k . Ainsi, dans $\int_{\partial D_i} \vec{F} \bullet d\vec{s}$, γ_k sera parcouru dans un sens, alors que dans $\int_{\partial D_j} \vec{F} \bullet d\vec{s}$, il sera parcouru

dans le sens opposé. Dans la somme (*), ces deux intégrales curvilignes s'annuleront. On a donc

$$\int_{\cup_i \partial D_i} \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_{\gamma'_1 \cup \dots \cup \gamma'_m} \vec{F} \bullet d\vec{s},$$

où γ'_k est une courbe sur la frontière d'un seul D_i , donc c'est une courbe de ∂D , c'est-à-dire $\gamma'_1 \cup \dots \cup \gamma'_m = \partial D$. On a bien l'égalité recherchée.



Étape 3. On doit montrer qu'un domaine tel que décrit dans l'énoncé se décompose en un nombre fini de domaines de type-I et de type-II qui s'intersectent le long de leur frontière.

En fait, on fera la démonstration dans un cas un peu moins général. On supposera que ∂D est une union d'un nombre fini de courbes de Jordan régulières et disjointes. Pour le cas général, il faudrait généraliser aux courbes de Jordan régulières par morceau et ensuite aux courbes telles que dans l'énoncé du théorème.

Supposons que ∂D s'écrit $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$, où γ_j est une courbe simple régulière et fermée.

Puisque γ_j est régulière, on sait que $\gamma'_j(t) \neq \vec{0}$ pour tout t . Ainsi, soit $\gamma'_{j,1}(t)$ ou $\gamma'_{j,2}(t)$ est non nul. Si $\gamma'_{j,1}(t)$ est non nul, alors par le théorème des fonctions inverse, on peut écrire $t = \gamma_{j,1}^{-1}(u)$ sur un petit intervalle $I_{j,t}$. Sur cette intervalle, on a

$$\gamma_j(\gamma_{j,1}^{-1}(u)) = \left(\begin{array}{c} u \\ \gamma_{j,2}(\gamma_{j,1}^{-1}(u)) \end{array} \right),$$

c'est-à-dire que le segment de courbe $\gamma_j(I_{j,t})$ est le graphe d'une fonction. On fait le même argument si c'est $\gamma'_{j,2}(t)$ qui est non nul. Puisque γ_j est compact, il existe un nombre fini d'intervalles $I_{j,t_1}, \dots, I_{j,t_{m_j}}$ tel que γ_j est recouvert par $\gamma_j(I_{j,t_1}), \dots, \gamma_j(I_{j,t_{m_j}})$. On applique cet argument pour $j = 1, \dots, n$.

On pose

$$\delta = \min_j \min_{1 \leq \ell \leq m_j - 1} \left\{ L\left(\gamma_j(I_{j,t_\ell}) \cap \gamma_j(I_{j,t_{\ell+1}})\right), L\left(\gamma_j(I_{j,t_\ell})\right), L\left(\gamma_j(I_{j,t_{m_j}})\right) \right\}.$$

On recouvre D par un trailli de largeur $\frac{\delta}{2}$. On numérote chacun des carrés du trailli qui intersecte $D \cup \partial D$ par σ_j , où $1 \leq j \leq N$. Il a deux types de carrés :

1. ceux contenus dans D , $\sigma_j \subset D$;
2. ceux qui intersecte ∂D ou $\mathbb{R}^2 \setminus \{D\}$.

Dans le premier cas, le carré est un domaine de type-I dans D . Il intersecte les autres domaines sur leur frontière.

Si σ_j est un carré du deuxième cas, alors $\sigma_j \cap (D \cup \partial D)$ est un domaine de type-I ou de type-II, car la largeur de σ_j est assez petite pour que $\sigma_j \cap \partial D$ soit le graphe d'une fonction (ou de plusieurs fonctions, si l'intersection n'est pas connexe).

Il est possible qu'un σ_j contienne un point d'intersection entre un γ_k et un γ_ℓ . Dans ce cas, il est possible qu'il faille diviser σ_j en plus petits carrés. On ne fera les détails de ce cas.

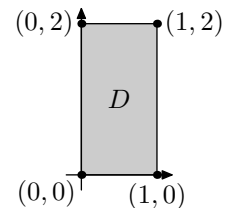
□

Exemple 2.4.3. Soit D le rectangle $[0, 1] \times [0, 2]$. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs donné par

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy(y-2) \\ xy(x-1) \end{pmatrix}.$$

Calculer

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$



On peut calculer directement l'intégrale, mais on constate que l'intégrale curviligne sur ∂D devra donner 0.

En effet, lorsque $x = 0$, on a $f(0, y) = \vec{0}$ et lorsque $y = 0$, on a $f(x, 0) = \vec{0}$. Lorsque $x = 1$, on a $f(1, y) = \begin{pmatrix} y(y-2) \\ 0 \end{pmatrix}$ et lorsque $y = 2$, on a $f(x, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x(x-1) \end{pmatrix}$.

Or, sur la courbe $\vec{r}(x) = (x, 2)^T$, on a $\vec{r}'(x) = (1, 0)^T$, donc $f(x, 2) \bullet \vec{r}'(x) = 0$.

Sur la courbe $\vec{q}(y) = (1, y)^T$, on a $\vec{q}'(y) = (0, 1)^T$, donc $f(1, y) \bullet \vec{q}'(y) = 0$.

Il suit que $\int_{\partial D} f \bullet ds = 0$. Par le théorème de Green, l'intégrale du départ est elle aussi nulle.

Exemple 2.4.4. Soit C_1 et C_2 les deux courbes obtenues respectivement par

$$x_1 = y^4 - 1 \quad \text{et} \quad x_2 = -y^4 + 1,$$

où $y \in [-1, 1]$. Soit f le champ de vecteur

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^{\frac{2}{3}} + y^2 \\ x + \sqrt[5]{y} \end{pmatrix}.$$

Calculer

$$\int_C f \bullet d\vec{s},$$

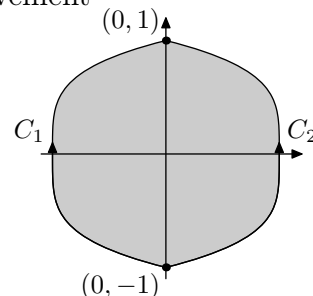
où $C = -C_1 \cup C_2$ (orientée positivement).

Comme la fonction f n'est pas facile à calculer, on dérive pour voir si les dérivées dans la formule de Green seront plus simple. On a

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Puisque f est de classe C^1 sur C et son l'intérieur, on peut utiliser le théorème de Green pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_C f \bullet d\vec{s} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D (1 - 2y) dA \\ &= \int_{-1}^1 \int_{y^4-1}^{-y^4+1} (1 - 2y) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 (1 - 2y)x \Big|_{y^4-1}^{-y^4+1} dy \\ &= \int_{-1}^1 (1 - 2y)(-y^4 + 1 - y^4 + 1) dy \\ &= \int_{-1}^1 (4y^5 - 2y^4 - 4y + 2) dy \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{4}{6}y^6 - \frac{2}{5}y^5 - 2y^2 + 2y \right]_{-1}^1 \\
&= -\frac{4}{5} + 4 \\
&= \frac{16}{5}.
\end{aligned}$$

Exemple 2.4.5. Aire d'une région. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine. Supposons que sa frontière ∂D est une courbe de classe C^1 . Alors l'aire de D est donnée par

$$\text{Aire}(D) = \int_{\partial D} x dy = - \int_{\partial D} y dx.$$

En effet, on sait que l'aire est donnée par

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dA.$$

Ainsi, en utilisant le théorème de Green avec la fonction $f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$, on trouve

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(D) &= \iint_D 1 dA \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y} \right) dA \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA \\
&= \int_{\partial D} f(x, y) \bullet d\vec{s} \\
&= \int_{\partial D} 0 dx + x dy. \\
&= \int_{\partial D} x dy.
\end{aligned}$$

On trouve l'autre formule de la même manière. Soit $g(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$. On utilise le théorème de Green pour trouver

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(D) &= \iint_D 1 dA \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial (-y)}{\partial y} \right) dA \\
&= \int_{\partial D} g(x, y) \bullet d\vec{s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial D} -y dx + 0 dy \\
&= - \int_{\partial D} y dx.
\end{aligned}$$

Exemple 2.4.6. Aire du deltoïde. Soit C le deltoïde paramétré par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t + \cos(2t) \\ 2 \sin t - \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Calculer l'aire.

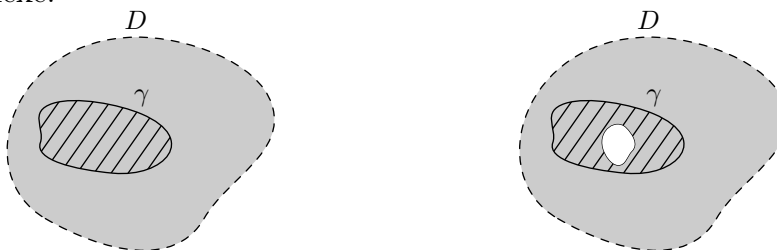
On utilise la formule de l'exemple précédent. Soit D la région à l'intérieur de C . Vérifions d'abord que C est orienté positivement. En $t = 0$, on a $\gamma(0) = (3, 0)^T$. En $t = \frac{\pi}{2}$, on a $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (-1, 2)^T$. En faisant le dessin de la courbe (faites-le!), on se convainc qu'elle est orientée positivement.

On a

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(D) &= - \int_C y dx \\
&= - \int_0^{2\pi} (2 \sin t - \sin(2t))(-2 \sin t - 2 \sin(2t)) dt \\
&= 2 \int_0^{2\pi} (2 \sin t - \sin(2t))(\sin t + \sin(2t)) dt \\
&= 2 \int_0^{2\pi} (2 \sin^2 t + 2 \sin t \sin(2t) - \sin t \sin(2t) - \sin^2(2t)) dt \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos(2t) + \sin t(1 - \cos(4t)) - \frac{1 - \cos(4t)}{2} \right) dt \\
&= 2(2\pi - 0 + -\pi + 0) - 2 \int_0^{2\pi} \sin t \cos(4t) dt \\
&= 2\pi - \int_0^{2\pi} (\sin(t + 4t) + \sin(t - 4t)) dt \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Définition 2.4.6. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine. On dit que D est *simplement connexe* si pour toute courbe fermée simple (courbe de Jordan), l'intérieur de la courbe est contenue dans D .

Autrement dit, un domaine est simplement connexe s'il n'y a aucun trou. Sur la figure ci-bas à gauche, on voit un domaine simplement connexe, tandis qu'à droite, il n'est pas simplement connexe.



Exemple 2.4.7. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine simplement connexe. Soit $\vec{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs. Si

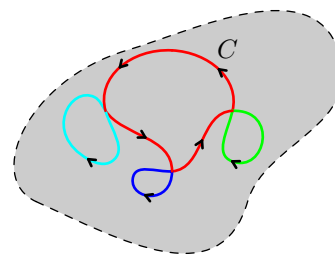
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

alors \vec{F} est conservatif.

Pour toute courbe fermée simple γ dans D , on sait que F est de classe C^1 sur l'intérieur de γ , car son intérieur est contenu dans D . Ainsi, on peut appliquer le théorème de Green pour obtenir

$$\int_{\gamma} F \bullet d\vec{s} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \iint_D 0 dA = 0.$$

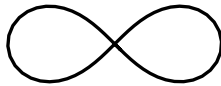
Ensuite, pour toute courbe fermée C , on peut décomposer C en boucles simples et sur chaque boucle, on aura que l'intégrale curviligne est nul, donc que l'intégrale curviligne sur C est nul. Par exemple, sur la figure, on voit que C est composée de quatre boucles simples. Ainsi, \vec{F} possède la propriété d'indépendance du chemin.



Exemple 2.4.8. Soit $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Calculer l'intégrale curviligne de \vec{F} sur la lemniscate L

$$\varphi(\theta) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{\sin \theta}{1 + \cos^2 \theta} \\ \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \cos^2 \theta} \end{pmatrix}.$$


Solution. D'abord, notons que \vec{F} est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et que \mathbb{R}^2 est simplement connexe. Ainsi, il sera possible d'appliquer le théorème de Green.

On remarque que \vec{F} est conservatif. En effet, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial y} &= 2x \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= 2x\end{aligned}$$

et \mathbb{R}^2 est simplement connexe.

On trouve assez facilement que le potentiel de F est $f(x, y) = x^2y$.

On peut finalement conclure que $\int_L \vec{F} \bullet d\vec{s}$ est nulle. En effet, la lemniscate est une courbe fermée qui se divise en deux courbes fermées et simples. Sur chacune de ces courbes, l'intégrale est nulle, car F est conservatif.

Le théorème de Green se réécrit d'une autre façon. Soit $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs de \mathbb{R}^2 . On sait que le rotationnel est seulement défini pour les vecteurs de \mathbb{R}^3 , donc on considère que \vec{F} se trouve dans \mathbb{R}^3 en ajoutant 0 à la dernière composante :

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lorsque l'on calcule le rotationnel, on obtient

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Enfin, le domaine de \vec{F} se trouve dans le plan xy , donc on peut prendre le vecteur normal $\vec{n} = (1, 0, 0)^T$ partout. On a

$$\text{rot } \vec{F} \bullet \vec{n} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

On peut donc réécrire le théorème de Green de la façon suivante

Théorème de Green (version dans \mathbb{R}^3) **2.4.7.** Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné du plan dont la frontière ∂D est composée d'un nombre fini de courbes régulières orientées positivement. Si $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ est un champ de vecteurs de classe C^1 sur D et continue sur $\bar{D} = D \cup \partial D$, alors on a

$$\int_{\partial D} \vec{F} \bullet ds = \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \bullet d\vec{S}.$$

Remarque. Ceci n'est pas un théorème différent, c'est le même énoncé écrit dans une notation différente.

La question naturelle est de se demander sur quels domaines de \mathbb{R}^3 cette formule reste valide. C'est le contenu du théorème de Stokes.

2.4.3 Théorème de Stokes

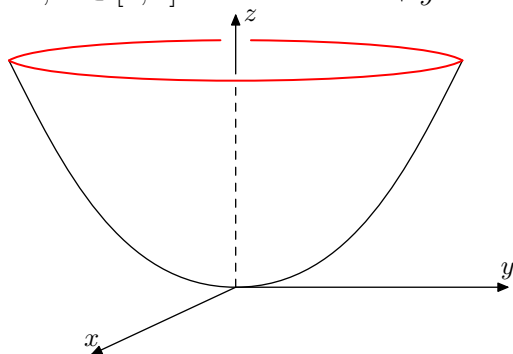
Le bord d'une surface

Pour les besoins du cours, les surfaces considérées auront un bord composé d'une courbe de classe C^1 . Par exemple, le bord de l'hémisphère nord d'une sphère sera l'équation ; le bord d'un cylindre sera les deux cercles aux extrémités.

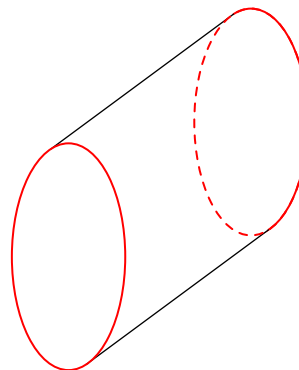
On fera donc appel à une notion intuitive de ce que doit être un bord et celui-ci sera toujours « évident » à trouver.

Exemple 2.4.9. Bord d'un parabolôïde et d'un cylindre.

Le bord de la partie du parabolôïde $x^2 + y^2 = z$, $z \in [0, 2]$ est le cercle $x^2 + y^2 = 2$.



Le bord d'une partie de cylindre est composé des deux extrémités.



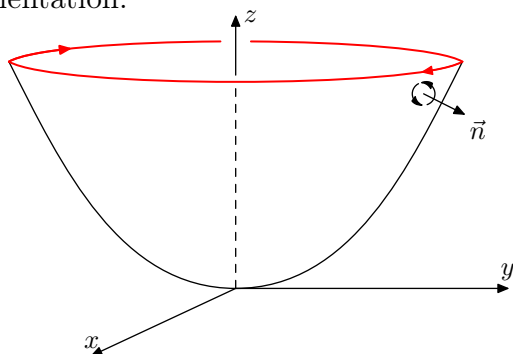
Énoncé du théorème

Rappelons qu'une surface est orientable lorsqu'il existe un choix cohérent de vecteur normal en chaque point.

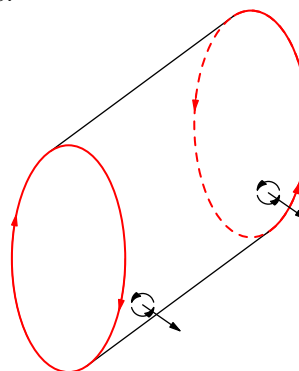
Définition 2.4.8. Soit S une surface régulière, dont la frontière ∂S est un nombre fini de courbes de Jordan de classe C^1 . Soit \vec{n} un choix d'orientation sur S . On dit que ∂S est *orientée positivement* par rapport à \vec{n} si un marcheur placé sur une courbe de ∂S , orienté comme l'indique la normale et parcourant ∂S dans cette orientation, voit la surface à sa gauche.

Exemple 2.4.10. Orientation du bord d'un parabolôïde et d'un cylindre.

Lorsque le vecteur normal pointe vers l'extérieur, le bord du parabolôïde est orienté comme sur la figure. On peut utiliser la règle de la main droite pour déterminer l'orientation.



Les deux courbes formant le bord du cylindre sont orientées dans des sens opposés pour être compatible avec l'orientation du cylindre.



On rappelle qu'une surface S est régulière lorsqu'il existe un paramétrage de classe C^1 et tel que \vec{N} est non nul. Pour le prochain théorème, on aura besoin d'une condition un peu plus forte.

Définition 2.4.9. Soit S une surface dans \mathbb{R}^3 . On dit qu'elle est régulière de classe C^n s'il existe un paramétrage $\Sigma: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S tel que Σ est de classe C^n et $\vec{N} = \frac{\partial \Sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \Sigma}{\partial v}$ est non nul pour tout $(u, v) \in D$.

Pour le cours, on ne demandera pas de vérifier qu'une surface est régulière de classe C^n , on le tiendra pour acquis dans les exemples et les exercices que l'on rencontrera.

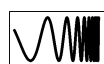
Théorème de Stokes 2.4.10. Soit S une surface régulière de classe C^2 orientable dont le bord ∂S est un nombre fini de courbes de Jordan de classe C^1 . Soit \vec{n} un choix d'orientation de S . Soit $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un domaine qui contient S et soit $\vec{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe $C^1(D)$. Si ∂S est orientée positivement, alors

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \bullet d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \bullet d\vec{s},$$

c'est-à-dire que le flux de $\nabla \times \vec{F}$ à travers S est donné par la circulation de \vec{F} le long de ∂S .

Démonstration. Soit $\Sigma: A \rightarrow \mathbb{R}^3$, un paramétrage de S , où $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Soit $\vec{f}: [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^2$ un paramétrage de ∂A . Pour simplifier la preuve, on fait l'hypothèse que ∂A est composée d'une seule courbe de Jordan régulière, mais il serait possible qu'il y en ait plus, auquel cas il faudrait considérer $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots$ pour paramétrer toutes les courbes.

On pose $\vec{\gamma}(t) := \Sigma(\vec{f}(t))$, c'est une courbe de S telle que $\partial S \subseteq \vec{\gamma}([a, b])$.



Il est possible que $\partial S \neq \vec{\gamma}([a, b])$. Par exemple, si S est un cylindre de hauteur 1 paramétré par $\Sigma(u, v) = \begin{pmatrix} v \cos u \\ v \sin u \\ v \end{pmatrix}$, alors ∂D est un carré et γ est composé du cercle à la base du cylindre, un

segment de droite qui monte au cercle au haut du cylindre, ce cercle et enfin ce même segment parcouru dans l'autre sens.

Dans tous les cas, si une partie de γ n'est pas sur la frontière de S , alors dans l'intégrale, les parties de la courbe qui ne sont pas sur la frontière seront parcourues deux fois dans les sens opposés, donc ils s'annuleront.

On a

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt}\Sigma(\vec{f}(t)) = \text{Jac } \Sigma(\vec{f}(t))\vec{f}'(t).$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} \bullet d\vec{\gamma} &= \int_a^b \vec{F}(\Sigma(\vec{\gamma}(t))) \bullet \vec{\gamma}'(t) dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\Sigma(\vec{\gamma}(t))) \bullet (\text{Jac } \Sigma(\vec{f}(t))\vec{f}'(t)) dt \\ &= \int_a^b \left[(\text{Jac } \Sigma(\vec{f}(t)))^T \vec{F}(\Sigma(\vec{\gamma}(t))) \right] \bullet \vec{f}'(t) dt \end{aligned}$$

On pose

$$\vec{G}(x, y) = (d\Sigma(x, y))^T \vec{F}(\Sigma(x, y)),$$

où $\vec{G}: A \rightarrow \mathbb{R}^3$. L'intégrale précédente devient

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} \bullet d\vec{\gamma} &= \int_a^b \vec{G}(\vec{f}(t)) \bullet \vec{f}'(t) dt \\ &= \int_{\partial D} \vec{G} \bullet d\vec{f} \\ &\stackrel{*}{=} \iint_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dA. \end{aligned} \quad (\text{Théorème de Green})$$

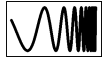
On a l'égalité suivante, que l'on démontrera à la fin,

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = (\nabla \times \vec{F}) \bullet (\vec{T}_x \times \vec{T}_y), \quad (**)$$

où $\vec{T}_x = \frac{\partial \Sigma}{\partial x}$ et $\vec{T}_y = \frac{\partial \Sigma}{\partial y}$.

On remplace dans (*) pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} \bullet d\vec{\gamma} &= \iint_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \bullet (\vec{T}_x \times \vec{T}_y) dA \\ &= \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \bullet \vec{N} dA \\ &= \int_S (\nabla \times \vec{F}) \bullet d\vec{S}. \end{aligned}$$



Il reste à montrer (**). Ce calcul est un peu plus difficile à suivre. On omet d'écrire le « (x, y) » partout afin d'alléger. On a

$$\begin{aligned}\vec{G} &= \left(d\vec{\Sigma} \right)^T \vec{F} \circ \Sigma \\ &= \begin{pmatrix} T_x^T \\ T_y^T \end{pmatrix} \vec{F} \circ \Sigma \\ &= \begin{pmatrix} T_x^T \vec{F} \circ \Sigma \\ T_y^T \vec{F} \circ \Sigma \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(C'est un simple exercice d'algèbre linéaire que de vérifier cette dernière égalité.) Ici, l'expression $T_x^T \vec{F} \circ \Sigma$ est la produit du vecteur ligne T_x^T (1×3) avec le vecteur colonne $\vec{F} \circ \Sigma$ (3×1). Si on dérive, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(T_y^T \vec{F} \circ \Sigma \right) \\ &= T_{xy}^T \vec{F} \circ \Sigma + T_y^T d\vec{F} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} \\ &= T_{xy}^T \vec{F} \circ \Sigma + T_y^T d\vec{F} T_x \quad (\text{car } \frac{\partial \Sigma}{\partial x} = T_x)\end{aligned}$$

et, de la même façon,

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = T_{xy}^T \vec{F} \circ \Sigma + T_x^T d\vec{F} T_y.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} &= \left(T_{xy}^T \vec{F} \circ \Sigma + T_y^T d\vec{F} T_x \right) - \left(T_{xy}^T \vec{F} \circ \Sigma + T_x^T d\vec{F} T_y \right) \\ &= T_y^T d\vec{F} T_x - T_x^T d\vec{F} T_y \\ &= T_y^T d\vec{F} T_x - \left(T_x^T d\vec{F} T_y \right)^T \quad (\text{car } T_x^T d\vec{F} T_y \text{ est un scalaire}) \\ &= T_y^T d\vec{F} T_x - T_y^T d\vec{F}^T T_x \\ &= T_y^T \left(d\vec{F} - d\vec{F}^T \right) T_x.\end{aligned}$$

On montre maintenant que $\left(d\vec{F} - d\vec{F}^T \right) T_x = (\nabla \times F) \times T_x$. On le montre pour les vecteurs de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$. On a

$$\left(d\vec{F} - d\vec{F}^T \right) e_1 = \begin{pmatrix} 0 & F_{1y} - F_{2x} & F_{1z} - F_{3x} \\ F_{2x} - F_{1y} & 0 & F_{2z} - F_{3y} \\ F_{3x} - F_{1z} & F_{3y} - F_{2z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{2x} - F_{1y} \\ F_{3x} - F_{1z} \end{pmatrix}$$

et aussi

$$(\nabla \times F) \times e_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ F_{3y} - F_{2z} & F_{1z} - F_{3x} & F_{2x} - F_{1y} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{2x} - F_{1y} \\ F_{3x} - F_{1z} \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que $\left(d\vec{F} - d\vec{F}^T \right) e_1 = (\nabla \times F) \times e_1$. Les calculs pour e_2 et e_3 sont analogues et sont laissés en exercice. Pour $v \in \mathbb{R}^3$, l'application $v \times \cdot$ est linéaire, donc on conclut que $\left(d\vec{F} - d\vec{F}^T \right) w = (\nabla \times \vec{F}) \times w$ pour tout $w \in \mathbb{R}^3$.

Ainsi, on peut finalement conclure que

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} &= T_y^T \left(d\vec{F} - d\vec{F}^T \right) T_x \\ &= T_y^T (\nabla \times \vec{F}) \times T_x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T_y \bullet (\nabla \times \vec{F}) \times T_x \quad (\text{car pour } v, w \in \mathbb{R}^n, \text{ on a } v^T w = v \bullet w) \\
&= \det \begin{pmatrix} T_y & \nabla \times \vec{F} & T_x \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \nabla \times \vec{F} & T_x & T_y \end{pmatrix} \\
&= (\nabla \times \vec{F}) \bullet (T_x \times T_y).
\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration de (**) et donc du théorème de Stokes. □

Exemple 2.4.11. Soit C le cône paramétré par

$$\Sigma(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ r \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi) \\ r \in [0, 1] \end{array},$$

avec l'orientation induite par Σ , c'est-à-dire $\vec{N} = \frac{\partial \Sigma}{\partial r} \times \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta}$. Soit le champ de vecteurs

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + e^{x^2} \\ z + \cos y \\ x \end{pmatrix}.$$

Calculer $\int_{\partial C} F \bullet d\vec{S}$, où ∂C est orienté dans le sens positif par rapport à \vec{N} .

Calculons le rotationnel pour voir s'il est plus simple. On a

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{F}(x, y, z) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y + e^{x^2} & z + \cos y & x \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Comme c'est un champ constant, on préférera utiliser le théorème de Stokes. On a déjà calculé le vecteur normal du cône, qui est donné par

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} -r \cos \theta \\ -r \sin \theta \\ r \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_{\partial C} \vec{F} \bullet d\vec{s} &= \int_C \nabla \times \vec{F} \bullet d\vec{S} \\
&= \iint_D \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -r \cos \theta \\ -r \sin \theta \\ r \end{pmatrix} d\theta dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \cos \theta + r \sin \theta - r) dr d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos \theta + \sin \theta - 1) d\theta \\
&= -\pi.
\end{aligned}$$

Exemple 2.4.12. Changement de surface. Soit à nouveau le cône C

$$\Sigma(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ r \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi) \\ r \in [0, 1] \end{array},$$

avec l'orientation induite par Σ . Soit le champ de vecteurs

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(xz) \\ x + \log(y^2 + z^2 + 1) \\ x^2 + y^3 + z^4 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\int_{\partial S} \vec{F} \bullet d\vec{s}$.

Calculons d'abord le rotationnel de \vec{F} . On a

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} i & \partial_x & \cos(xz) \\ j & \partial_y & x + \log(y^2 + z^2 + 1) \\ k & \partial_z & x^2 + y^3 + z^4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3y^2 + \frac{2z}{y^2+z^2+1} \\ -2x - x \sin(xz) \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On voit que ceci ne sera pas simple à calculer sur le cône. Puisque ∂S est le cercle $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$, on utilise le théorème de Stokes sur une surface différente qui a le même bord que S .

Soit D le disque à l'intérieur de ∂S , c'est-à-dire

$$D = \{(x, y, 1) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

On a bien $\partial D = \partial S$. Puisque \vec{N} pointe à vers le haut, l'orientation de ∂D est dans le sens positif, c'est-à-dire de l'axe des x vers l'axe des y . Ainsi, pour que l'orientation de D et ∂D soit compatible, on prend un vecteur normal \vec{n} qui point directement vers le haut : $\vec{n} = (0, 0, 1)^T$. On a

$$\int_{\partial S} \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_{\partial D} \vec{F} \bullet d\vec{s}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_D \nabla \vec{F} \cdot d\vec{S} \\
&= \iint_D \begin{pmatrix} 3y^2 + \frac{2z}{y^2+z^2+1} \\ -2x - x \sin(xz) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA \\
&= \iint_D 1 dA \\
&= \text{Aire}(D) = \pi.
\end{aligned}$$

Exemple 2.4.13. Soit l'ellipse E défini par $x^2 + 4y^2 = 16$, $z = 0$, orienté positivement, c'est-à-dire de l'axe des x vers l'axe des y . Soit le champ de vecteurs

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z - 1 \\ x(z - 1) \\ (z - 1)e^{z^2} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\int_E \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

On ne peut pas calculer directement l'intégrale à cause du e^{z^2} , donc on calcule le rotationnel. On a

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z - 1 & x(z - 1) & (z - 1)e^{z^2} \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -x \\ 1 \\ z - 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Comme le rotationnel n'est pas compliqué, on utilise le théorème de Stokes. On peut choisir la surface de notre choix, tant qu'elle ait E comme bord.

Comme la courbe est une ellipse, il n'est pas évident de choisir une surface simple sur laquelle le calcul sera possible. On prend donc un cylindre ellipsoïdal C de hauteur 1 :

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + 4y^2 = 16, z \in [0, 1]\}.$$

Le bord de C est composé de deux courbes, de E et d'une autre ellipse que l'on appelle E' .

Pour que l'orientation de C et de E soit compatible, il faut que le vecteur normal pointe vers l'extérieur de C . Ceci induit une orientation à E' , qui est celle opposée à E , c'est-à-dire allant de l'axe des y vers l'axe des x . Par le théorème de Stokes, on obtient

$$\int_C \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_E + \int_{E'} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

donc on obtient l'intégrale voulue en isolant :

$$\int_E \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} - \int_{E'} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Commençons par calculer l'intégrale curviligne sur E' . Puisque sur E' , on a $z = 1$, on voit que $F(x, y, 1) = 0$. Ainsi, il suit que

$$\begin{aligned}\int_{E'} \vec{F} \bullet d\vec{s} &= \int_a^b \vec{F}(x, y, 1) \bullet \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Pour l'intégrale de flux, on commence par paramétrer C . On a

$$\Sigma(\theta, z) = \begin{pmatrix} 4 \cos \theta \\ 2 \sin \theta \\ z \end{pmatrix},$$

avec $\theta \in [0, 2\pi]$ et $z \in [0, 1]$. On calcule le vecteur normal. On a

$$d\Sigma(\theta, z) = \begin{pmatrix} -4 \sin \theta & 0 \\ 2 \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc on a

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ 4 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie qu'il pointe vers l'extérieur. En $(\theta, z) = (0, 0)$, on a $\vec{N}(0, 0) = (2, 0, 0)^T$, ce qui est la bonne direction.

Ensuite, on calcule $(\nabla \times \vec{F}) \circ \Sigma$ (la composée). On a

$$(\nabla \times \vec{F}) \circ \Sigma(\theta, z) = \begin{pmatrix} -4 \cos \theta \\ 1 \\ z - 1 \end{pmatrix}.$$

Le produit scalaire donne

$$(\nabla \times \vec{F}) \circ \Sigma \bullet \vec{N} = \begin{pmatrix} -4 \cos \theta \\ 1 \\ z - 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ 4 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = -8 \cos^2 \theta + 4 \sin \theta.$$

Enfin, l'intégrale nous donne

$$\begin{aligned}\int_C \nabla \times \vec{F} \bullet d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-8 \cos^2 \theta + 4 \sin \theta) dz d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-8 \cos^2 \theta + 4 \sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -8 \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -4(1 - \cos(2\theta)) d\theta \\ &= -8\pi.\end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \int_E \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_C (\nabla \times \vec{F}) \bullet d\vec{S} - \int_{E'} \vec{F} \bullet d\vec{s} = -8\pi + 0 = -8\pi.$$

On s'intéresse à nouveau à la question de champ conservatif. Si $\vec{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, où $D \subseteq \mathbb{R}^3$, est irrotationnel ($\text{rot}(\vec{F}) = 0$), est-il conservatif? Dans le cas de \mathbb{R}^2 , on a vu que cela était vrai si D était simplement connexe.

Définition 2.4.11. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble. On dit que D est *simplement connexe* si pour toute courbe fermée simple C , il existe une surface S (de dimension 2) contenue dans D dont le bord est exactement C .

La simple connexité dans \mathbb{R}^3 est un peu plus nuancée que dans le plan, car ce n'est plus simplement un « domaine sans trou ». En effet, $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ est simplement connexe. Un exemple très simple d'un domaine qui n'est pas simplement connexe est $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{d}\}$, où \vec{d} est une droite.

Corollaire 2.4.12. Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un domaine simplement connexe. Soit $\vec{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs. On a $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ si et seulement si \vec{F} est conservatif.

Remarque. L'hypothèse que D soit simplement connexe est importante. En effet, le champ de vecteurs

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

défini sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ satisfait à la condition $\nabla \times \vec{F} = 0$, mais ce n'est pas un champ conservatif, car $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{s} = 2\pi$, où C est le cercle $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, orienté dans le sens antihoraire.

Démonstration. On montre que \vec{F} possède la propriété d'indépendance du chemin. Soit C une courbe fermée. Si C n'est pas simple, on la décompose en courbes simples et fermées C_1, C_2, \dots aux points d'intersection. Puisque C_j est simple et fermée et que D est simplement connexe, il existe une surface S_j telle que $\partial S_j = C_j$. On a, par le théorème de Stokes

$$\int_{C_j} \vec{F} \bullet d\vec{s} = \iint_{S_j} \nabla \times \vec{F} \bullet d\vec{S} = 0.$$

Il suit que l'intégrale sur C aussi vaut zéro, puisque c'est la somme des intégrales sur les C_j . \square

Pour les champs conservatifs, s'il est possible de relier deux courbes par une surface, alors leur intégrale est égale, si les courbes sont orientées correctement.

Exemple 2.4.14. Soit C_1 le cercle $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, et C_2 , le cercle $x^2 + z^2 = 1$, $y = 1$. Soit \vec{F} un champ conservatif. Montrer que $\int_{C_1} \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{F} \bullet d\vec{s}$, si C_1 et C_2 sont tous deux orientées dans le sens allant de l'axe des x vers l'axe des z .

Comme C_1 et C_2 forment le bord du cylindre $x^2 + z^2 = 1$, $y \in [0, 1]$, on a, en orientant le cylindre avec la normale qui pointe vers l'extérieur

$$\int_S \nabla \times \vec{F} \bullet d\vec{s} = \left(\int_{-C_1} + \int_{C_2} \right) \vec{F} \bullet d\vec{s} = 0.$$

Le résultat en suit.

Retour sur le rotationnel

On a déjà vu la définition du rotationnel, mais on a reporté son interprétation. Avec le théorème de Stokes, il est possible de lier assez simplement la circulation au rotationnel.

Soit \vec{v} un champ de vecteur défini sur un domaine D simplement connexe de \mathbb{R}^3 . Soit \vec{a} un point de D . Soit S_r un disque centré en \vec{a} de rayon r , paramétré par $\Sigma: R \rightarrow D$, et soit \vec{n} son vecteur normal unitaire. Remarquons que \vec{v} ne dépend pas de r . On a

$$\int_{\partial S_r} \vec{v} \bullet d\vec{s} = \int_{S_r} \nabla \times \vec{v} \bullet d\vec{S},$$

par le théorème de Stokes.

Voici l'idée (les détails rigoureux ce trouvent plus bas) : on approxime $\nabla \times \vec{v} \bullet \vec{n}(\vec{x})$ par $\nabla \times \vec{v} \bullet \vec{a}(\vec{a})$, puisque quand r est petit, \vec{x} se trouve près de \vec{a} . Ainsi, on a

$$\int_{S_r} \nabla \times \vec{v} \bullet d\vec{S} \approx \iint_E \nabla \times \vec{v} \bullet \vec{n}(\vec{a}) \|\vec{N}\| dA = \nabla \times \vec{v} \bullet \vec{n}(\vec{a}) \text{Aire}(S_r).$$

On a donc

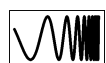
$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Aire}(S_r)} \int_{\partial S_r} \vec{v} \bullet d\vec{s} = \nabla \times \vec{v} \bullet \vec{n}(\vec{a}).$$

Ici, l'aire du disque est πr^2 .

D'un côté, on a la circulation et de l'autre, le rotationnel. Ainsi, le rotationnel mesure la densité de la circulation le long de cercles infiniment proche de \vec{a} dans le plan perpendiculaire à \vec{n} . Si cette densité est grande, cela signifie que la circulation suit des cercles de très près, donc que le champ de vecteur a tendance à tourner dans ce plan.

On remarque également que $\nabla \times v(\vec{a}) \bullet \vec{n}$ est maximal lorsque \vec{n} est parallèle à $\nabla \times (\vec{a})$. C'est donc dans ce plan perpendiculaire que le tournoiement est maximal. De plus, lorsque \vec{n} est perpendiculaire à $\nabla \times v(\vec{a})$, le tournoiement est nul. Ainsi, la tendance à la rotation du champ de vecteur s'effectue autour d'un axe principal, dont la direction est exactement $\nabla \times v(\vec{a})$.

Enfin, notons que cette analyse n'a rien de physique, c'est une interprétation géométrique (mathématique) du rotationnel à l'aide d'outils de l'analyse réel. Ainsi, c'est une interprétation qui fonctionne quelque soit l'objet physique que \vec{v} représente. Par exemple, si \vec{v} modélise la propagation de la chaleur, le rotationnel mesure la tendance à la chaleur de tourner (ou, plus vraisemblablement, à ne pas tourner).



On pose $F = \nabla \times \vec{v} \bullet \vec{n}$, c'est champ scalaire de $D \rightarrow \mathbb{R}$. Par la définition de la dérivée, on a

$$F(\vec{x}) = F(\vec{a}) + \text{Jac}_{\vec{a}} F(\vec{x} - \vec{a}) + R(\vec{x} - \vec{a}),$$

où R est un reste qui satisfait à

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{R(\vec{x} - \vec{a})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0.$$

Soit $\Sigma: E \rightarrow D$ un paramétrage de S_r . On a

$$\int_{S_r} \nabla \times \vec{v} \bullet d\vec{S} = \iint_E F \bullet \vec{n} dS.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que si $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$, alors $\|\text{Jac}_{\vec{a}} F(\vec{x} - \vec{a}) + R(\vec{x} - \vec{a})\| < \varepsilon$. On pose $\vec{x} = \Sigma(u, v)$ et $\vec{a} = \Sigma(u_0, v_0)$. Si $r \leq \delta$, alors on aura $\|\Sigma(u, v) - \Sigma(u_0, v_0)\| < \delta$ pour tout $(u, v) \in E$. Ainsi, on a

$$\iint_E F(\Sigma(u, v)) \bullet \vec{n} \|\vec{N}\| dv dv = \iint_E (F(\vec{a}) + \text{Jac}_{\vec{a}} F(\vec{x} - \vec{a}) + R(\vec{x} - \vec{a})) dS.$$

De plus, on a

$$\iint_E F(\vec{a}) \|\vec{N}\| dS = \text{Aire}(S_r) F(\vec{a}).$$

Il suit que

$$\left\| \int_{\partial S_r} \vec{v} \bullet d\vec{s} - \text{Aire}(S_r) F(\vec{a}) \right\| \leq \iint_E \varepsilon dS.$$

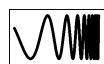
On voit que l'inégalité est vraie pour tout $r < \delta$, donc on laisse $r \rightarrow 0^+$. Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, on conclut que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Aire}(S_r)} \int_{\partial S_r} \vec{v} \bullet d\vec{s} = F(\vec{a}) = \nabla \times \vec{v}(\vec{a}) \bullet \vec{n}.$$

2.4.4 Théorème de Gauss (ou de la divergence)

Le dernier théorème du cours porte sur l'intégration d'un volume. Un volume est une région connexe de l'espace.

Définition 2.4.13. Soit V un volume. La *frontière* de V , notée ∂V , est l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 atteignable à partir de V et de $\mathbb{R}^3 \setminus V$.



Remarque. On parle d'un point atteignable au sens où il existe une suite de points qui converge vers le point atteignable.

Plus rigoureusement, un point \vec{x} est sur la frontière de V si pour toute boule ouverte B centré x , B intersecte à la fois V et $\mathbb{R}^3 \setminus V$.

Les volumes avec lesquels l'on travaillera auront une frontière formée d'une ou de plusieurs surfaces.

Exemple 2.4.15. La frontière de la boule ouverte

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

est la sphère de rayon 1.

La frontière du cylindre plein

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0, 1]\}$$

est formée de trois surfaces : le cylindre et les deux disques à chaque extrémité.

La frontière de la boule de laquelle a été retiré une plus petite boule

$$B = \{(x, y, z) \mid \frac{1}{2} < x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

est formée de la sphère de rayon 1 et de la sphère de rayon $\frac{1}{2}$.

Définition 2.4.14. On dit que ∂V est *orienté positivement par rapport à* V si le vecteur normal à ∂V pointe toujours à l'extérieur de V .

Exemple 2.4.16. La sphère est orientée positivement par rapport à la boule qu'elle contient si son vecteur normal pointe à l'extérieur.

Théorème de Gauss 2.4.15. Soit V un volume tel que sa frontière ∂V est composée d'un nombre fini de surfaces de classe C^1 . Soit $F: \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur V et continue sur $\bar{V} = V \cup \partial V$. Si ∂V est orientée positivement par rapport à V , alors on a

$$\int_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV,$$

où $dV = dx dy dz$ est un élément de volume.

Exemple 2.4.17. Soit S la sphère unité et soit le champ de vecteurs

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz^3 \\ xe^z \\ \cos(xy) \end{pmatrix}.$$

Calculer le flux de F au travers S , où l'orientation est positive.

On remarque que la divergence est nulle. En effet, on a

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(yz^3) + \frac{\partial}{\partial y}(xe^z) + \frac{\partial}{\partial z} \cos(xy) = 0.$$

Ainsi, par le théorème de Gauss, on a

$$\int_S F \cdot d\vec{S} = \iiint_B \operatorname{div} F dV = 0,$$

où B est le volume contenu dans la sphère.

On peut utiliser le théorème de Gauss pour calculer des volumes. En effet, on a

$$\iiint dV = \iiint_V \frac{\partial x}{\partial x} dV = \int_{\partial V} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d\vec{S}.$$

De manière similaire, si \vec{F} est un champ de vecteurs défini sur $V \cup \partial V$ de sorte que $\operatorname{div} \vec{F} = 1$, alors on a

$$\operatorname{Vol}(V) = \iiint_V dV = \int_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Exemple 2.4.18. Volume de la surface de révolution de l'astroïde. Soit l'astroïde dans le plan xz défini par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ 0 \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ 0 \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}.$$

Calculer le volume du solide de révolution obtenu par la rotation de la région contenue dans l'astroïde autour de l'axe des z .

Appelons V le solide de révolution. On souhaite calculer $\text{Vol}(V) = \iiint_V dV$, mais il n'est pas évident comment paramétrer cette région. On penche donc vers la formule du volume offerte par le théorème de Gauss.

On paramétrise d'abord la surface de révolution, c'est-à-dire ∂V . On a

$$\Sigma(t, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ 0 \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \cos \theta \\ \gamma_1(t) \sin \theta \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix},$$

avec $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. On restreint t à cet intervalle, car autrement, on recouvrira la surface deux fois. (On aurait également pu prendre $t \in [0, 2\pi]$ et $\theta \in [0, \pi]$.)

On trouve ensuite

$$d\Sigma(t, \theta) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \cos \theta & -\gamma_1(t) \sin \theta \\ \gamma_1'(t) \sin \theta & \gamma_1(t) \cos \theta \\ \gamma_3'(t) & 0 \end{pmatrix}$$

et donc, le vecteur normal est donné par

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} i & \gamma_1'(t) \cos \theta & -\gamma_1(t) \sin \theta \\ j & \gamma_1'(t) \sin \theta & \gamma_1(t) \cos \theta \\ k & \gamma_3'(t) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_1(t) \gamma_3'(t) \cos \theta \\ -\gamma_1(t) \gamma_3'(t) \sin \theta \\ \gamma_1(t) \gamma_1'(t) \end{pmatrix}.$$

Si on remplace γ_1 et γ_3' , on trouve

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} -3 \cos^3 t \sin^2 t \cos t \cos \theta \\ -3 \cos^3 t \sin^2 t \cos t \sin \theta \\ -3 \cos^3 t \cos^2 t \sin t \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3 \cos^4 t \sin^2 t \cos \theta \\ 3 \cos^4 t \sin^2 t \sin \theta \\ 3 \cos^5 t \sin t \end{pmatrix}$$

On vérifie que \vec{N} pointe à l'extérieur de la surface. On a

$$\vec{N}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = - \begin{pmatrix} 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 \\ 0 \\ 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ 0 \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Comme les composantes sont négative et que l'on se trouve dans le premier octant, il suit que \vec{N} pointe vers l'intérieur de la surface. C'est la mauvaise orientation, donc on prend l'autre, à savoir $-\vec{N}$.

Pour se simplifier la tâche, on prend

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $\operatorname{div} F = 2$, donc on calculera deux fois le volume. On a

$$F(\Sigma(t, \theta)) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \cos \theta \\ \cos^3 t \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on obtient

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Vol}(V) &= \iiint_V 2 \, dV \\ &= \int_{\partial V} \vec{F} \bullet d\vec{S} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^3 t \cos \theta \\ \cos^3 t \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \cos^4 t \sin^2 t \cos \theta \\ 3 \cos^4 t \sin^2 t \sin \theta \\ 3 \cos^5 t \sin t \end{pmatrix} d\theta dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 3(\cos^7 t \sin^2 t \cos^2 \theta + 3 \cos^7 t \sin^2 t \sin^2 \theta) d\theta dt \\ &= 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos^7 t \sin^2 t d\theta dt \\ &= 6\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)^3 \sin^2 t \cos t dt \\ &= 6\pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)^3 x^2 dx \\ &= 6\pi \int_{-1}^1 (1 - 3x + 3x^2 - x^3) x^2 dx \\ &= 6\pi \int_{-1}^1 (x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5) dx \\ &= 6\pi \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{4} x^4 + \frac{3}{5} x^5 - \frac{1}{6} x^6 \right]_{-1}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 6\pi \left(\frac{2}{3} + \frac{6}{5} \right) \\
&= 2\pi \frac{28}{5}.
\end{aligned}$$

Le volume est donc $\text{Vol}(V) = \frac{28}{5}\pi$.

Interprétation de la divergence

Le théorème de Gauss nous permet de donner une interprétation à la divergence. Comme pour le rotationnel, cette interprétation est mathématique ; lorsque l'on donne un contexte physique au champ de vecteurs, l'interprétation se transfère au contexte.

Soit \vec{F} un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3 . En un point \vec{a} , on note la boule de rayon r par

$$B(\vec{a}, r) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < r^2\}.$$

La frontière de $B(\vec{a}, r)$ est la sphère S_r de rayon r centrée en \vec{a} .

Par le théorème de Gauss, on a

$$\iiint_{B(\vec{a}, r)} \text{div } \vec{F} dV = \int_{\partial B(\vec{a}, r)} \vec{F} \bullet d\vec{S}.$$

On le combine au théorème de la moyenne : pour chaque r , il existe un point \vec{c}_r tel que

$$\iiint_{B(\vec{a}, r)} \text{div } \vec{F} dV = \text{div } \vec{F}(\vec{c}_r) \text{Vol}(B(\vec{a}, r)).$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
\iiint_{B(\vec{a}, r)} \text{div } \vec{F} dV &= \int_{\partial B(\vec{a}, r)} \vec{F} \bullet d\vec{S} \\
&= \text{div } \vec{F}(\vec{c}_r) \text{Vol}(B(\vec{a}, r)).
\end{aligned}$$

Lorsque $r \rightarrow 0^+$, \vec{c}_r tend vers \vec{a} , car le rayon de la boule diminue. On a ainsi

$$\text{div}(\vec{F})(\vec{a}) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Vol}(B(\vec{a}, r))} \int_{S_r} \vec{F} \bullet d\vec{S}, \quad (*)$$

où $\text{Vol}(B(\vec{a}, r)) = \frac{4}{3}r^3\pi$.

L'intégrale dans (*) est la différence entre le flux qui sort de la boule et le flux qui entre la boule. Ainsi, la divergence de \vec{F} s'interprète comme la densité de la différence de flux à travers une boule infiniment petite. Lorsque $\text{div}(\vec{F})(\vec{a}) > 0$, on peut s'imaginer qu'il y a plus de flux qui s'éloigne de \vec{a} qu'il y en a qui s'en approche, et inversement pour $\text{div}(\vec{F})(\vec{a}) < 0$.

Ceci explique l'appellation suivante : lorsque $\text{div}(\vec{F})(\vec{a}) > 0$, on dit que \vec{a} est une source, puisqu'il « génère » du flux ; lorsque $\text{div}(\vec{F})(\vec{a}) < 0$, on dit que \vec{a} est un puit, puisqu'il « absorbe » du flux.