Calcul 2

Analyse vectorielle

1. Théorème de Green

Exercice 1. Pour chaque région suivante, dessiner la région, indiquer le sens positif et dire si la région est simplement connexe.

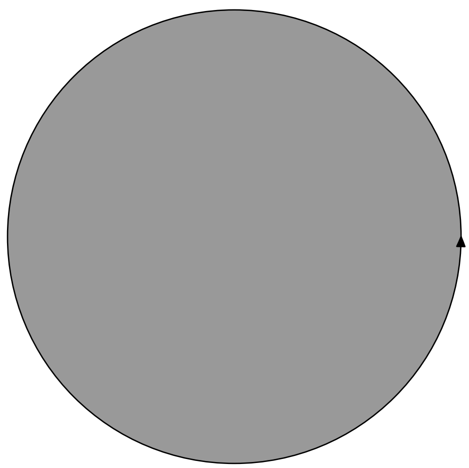
a) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

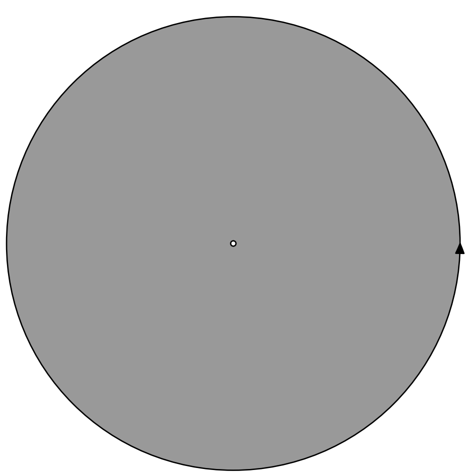
b) $D = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$

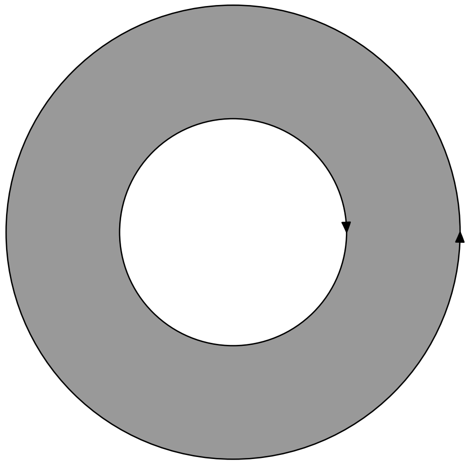
c) $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

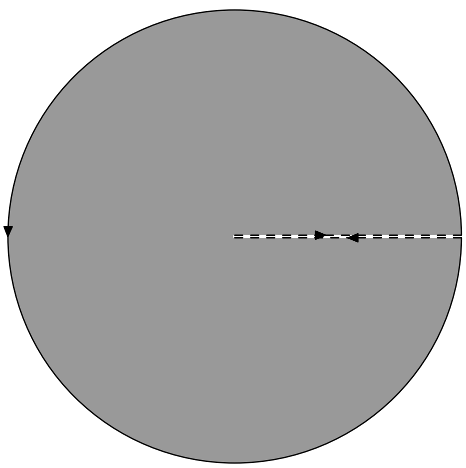
d) $D = \{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq 1\} \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

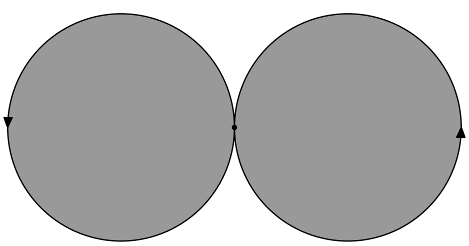
e) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \mid (x - 2)^2 + y^2 \leq 1\}$

Solution. a)  Simplement connexe

b)  Pas simplement connexe, car une l'interieur d'une boucle qui fait le tour de l'origine n'est pas contenu dans D

c)  Pas simplement connexe, même raison qu'au b)

d)  Simplement connexe. Précision pour l'orientation : sur la coupure dans le disque, il y a deux flèches dans des sens opposés, cela signifie que l'on parcourt la coupure deux fois, une fois dans un sens et une fois dans l'autre.

e)  Simplement connexe

Remarque. Il y a un argument plus rigoureux à faire au b) et au c), pour l'étudiant·e curieux·euse. On considère le champ de vecteurs

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

On vérifie par calcul direct que $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$ partout sur D. Ainsi, si D était simplement connexe, par un théorème vu en classe, on pourrait conclure que f est conservatif. Or, f n'a pas la propriété d'indépendance du chemin, car on a

$$\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\vec{s} = 2\pi,$$

où γ est le cercle $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ dans le sens anti-horaire. Ainsi, f ne peut pas être conservatif et cela signifie que D ne peut pas être simplement connexe.

Exercice 2. Calculer $\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\vec{s}$, où

a) γ est le cercle $x^2 + y^2 = 1$ paracourue dans le sens anti-horaire et $f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x^3} \\ y^2 \cos^2 y \end{pmatrix}$;

b) γ est la courbe polaire $r = \cos(\cos\theta)$ et $f(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix}$;

c) γ est la partie de parabole $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$, parcourue de gauche à droite et le segment de droite allant de $(-1, 1)$ à $(1, 1)$ et $f(x, y) = \begin{pmatrix} x \log|y + 2| \\ \frac{1}{2}\frac{x^2}{y+2} \end{pmatrix}$.

Solution. a) Le champ de vecteurs semble trop compliqué à intégrér, donc appliquons le théorème de Green, si possible. D'abord, on a

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 - 0 = 0.$$

Ainsi, on a

$$\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \iint_D 0 \mathrm{d}A = 0,$$

où D est le disque à l'intérieur du cercle γ.

b) Remarquons que la courbe polaire est fermée, puisque $r(0) = r(2\pi)$. On a

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = x - x = 0.$$

Comme au a), on obtient donc $\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \iint_D 0 \mathrm{d}A = 0$, où D est l'intérieur de la courbe.

Si la courbe n'est pas simple, on peut la décomposer en plusieurs courbes de Jordan et appliquer le raisonnement ci-haut à chaque morceau.

Exercice 3. Calculer $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}A$, où $f(x, y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ avec

a) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$;

b) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ et $f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ xy \end{pmatrix}$.

Solution. a) Calculons d'abord l'intégrande pour voir s'il est compliqué :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - 0 = 0.$$

Ainsi, l'intégrale donne 0.

b) Comme au a), on a

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - 1.$$

La région sur laquelle on intègre est simple et l'intégrande est simple elle aussi, on peut donc directement calculer l'intégrale ou utiliser le théorème de Green. Alons-y par la méthode directe. On utilise les coordonnées polaires : on a $r \in [0,1]$ et $\theta \in [0,\pi]$, car $y \geq 0$. La jacobienne est r. On obtient donc

$$\iint_D (y-1)\mathrm{d}A = \int_0^1 \int_0^\pi (r\sin\theta - 1)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = \int_0^1 (2r^2 - r\pi)\mathrm{d}r = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes en utilisant le théorème de Green pour les transformer en intégrales curviligne.

a) $\iint_D \cos(y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où D est la région contenue dans le triangle de sommets $(0,0)$, $(2,1)$ et $(1,1)$.

b) $\iint_D 2xe^{x^2+y^2}\mathrm{d}A$, où D est le disque unité $\overline{B}\big((0,0),1\big)$.

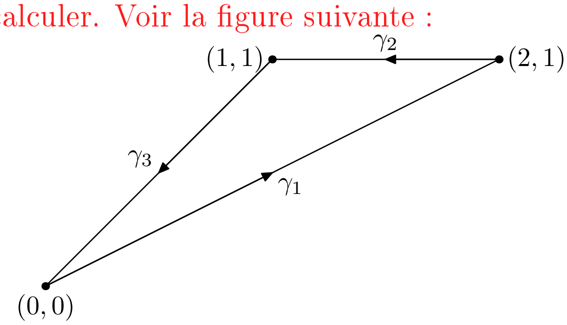
c) $\iint_D (-y\sin x + x\sin y)\mathrm{d}A$, où D est le carré $[0,1]\times[0,1]$.

Solution. a) On cherche un champ de vecteurs $f(x,y) = \binom{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$ tel que

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = \cos(y^2).$$

Il y a plusieurs choix possibles. Prenons $f(x,y) = \binom{0}{x\cos(y^2)}$, puisque c'est une option assez simple.

Pour utiliser le théorème de Green, on doit paramétrer la frontière de D dans le sens positif. Comme D est l'intérieur d'un trianle, sa frontière est un triangle. Le sens positif est le sens de parcours anti-horaire, donc de $(0,0)$ à $(2,1)$ à $(1,1)$ à $(0,0)$. On aura donc trois intégrales curvilignes à calculer. Voir la figure suivante :



1. De $(0,0)$ à $(2,1)$. On paramétrise ce segment par $\gamma_1(t) = \binom{2t}{t}$, $t\in[0,1]$. On a

$f \circ \gamma_1(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2t\cos(t^2) \end{smallmatrix}\right)$ et $\gamma'(t) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f \bullet \mathrm{d}\vec{s} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2t\cos(t^2) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 2t\cos(t^2)\mathrm{d}t \\
&= \sin(t^2)\Big|_0^1 \\
&= \sin 1.
\end{aligned}$$

2. De $(2,1)$ à $(1,1)$. On paramétrise par $\gamma_2(t) = \left(\begin{smallmatrix} -t \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $t \in [-2,-1]$. On a $f \circ \gamma_2(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -t\cos(1) \end{smallmatrix}\right)$ et $\gamma_2'(t) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Puisque $f \circ \gamma_2(t) \bullet \gamma_2'(t) = 0$, il suit que

$$\int_{\gamma_2} f \bullet \mathrm{d}\vec{s} = 0.$$

3. De $(1,1)$ à $(0,0)$. On paramétrise par $\gamma_3(t) = \left(\begin{smallmatrix} -t \\ -t \end{smallmatrix}\right)$, $t \in [-1,0]$. On a $f \circ \gamma_3(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -t\cos(t^2) \end{smallmatrix}\right)$ et $\gamma_3'(t) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Ensuite, on a $f \circ \gamma_3(t) \bullet \gamma_3'(t) = t\cos(t^2)$. Enfin, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_3} f \bullet \mathrm{d}\vec{s} &= \int_{-1}^0 t\cos(t^2)\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{2}\sin(t^2)\Big|_{-1}^0 \\
&= -\tfrac{1}{2}\sin(1).
\end{aligned}$$

On peut maintenant combiner et conclure que

$$\iint_D \cos(y^2)\mathrm{d}A = \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_1}\right) f \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \sin 1 + 0 - \tfrac{1}{2}\sin 1 = \tfrac{1}{2}\sin 1.$$

b) Il est aisé de voir que $\frac{\partial}{\partial x} e^{x^2+y^2} = 2xe^{x^2+y^2}$. Ceci motive le choix du champ de vecteurs

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

La frontière du disque est le cercle $x^2+y^2=1$. Le sens de parcours positif, par rapport à D, est dans le sens anti-horaire. On le paramétrise donc par $\gamma(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cos t \\ \sin t \end{smallmatrix}\right)$, $t \in [0, 2\pi]$. Ensuite, on a $F \circ \gamma(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ e^{\cos^2 t + \sin^2 t} \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ e \end{smallmatrix}\right)$. On a

$$\begin{aligned}
\iint_D 2xe^{x^2+y^2}\mathrm{d}A &= \int_\gamma F \bullet \mathrm{d}\vec{s} \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ e \end{smallmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} 2\cos t\mathrm{d}t \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Exercice 5. Calculer les intégrales curvilignes suivantes. (Refermez la région à l'aide d'une courbe bien choisie et utilisez le théorème de Green.)

a) $\displaystyle\int_\gamma \Big(2x\mathrm{d}x + (y^3e^{y^2} + x)\mathrm{d}y\Big)$, où γ est le demi-cercle $x^2 + y^2 =$, $y \geq 0$, orienté dans le sens anti-horaire.

b) $\displaystyle\int_C \Big((\cos x + xy^2)\mathrm{d}x + (\sin y^2 + x^2y)\mathrm{d}y\Big)$, où C est constituée des segment de $(1,0)$ à $(1,1)$ à $(0,1)$ à $(0,0)$.

c) $\displaystyle\int_C \Big(3y^2\mathrm{d}x + \log(y^4+1)\mathrm{d}x\Big)$, où C est la partie de parabole $y = -x^2 + 1$, $x \in [-1,1]$.

Solution. b) On pose $F(x,y) = \binom{F_1(x,y)}{F_2(x,y)} = \binom{\cos x + xy^2}{\sin y^2 + x^2y}$. La courbe C est représentée sur la figure 1. On voit qu'elle est composée de deux segments verticaux et d'un segment horizontal. Sur les segments verticaux, la variable y varie et donc $y \mapsto F(x,y)$ est une fonction assez compliquée. Si y est constante, comme sur le segment entre $(1,1)$ et $(0,1)$, alors c'est plus simple. On va utiliser le théorème de Green pour n'avoir qu'à intégrer sur un segment horizontal.

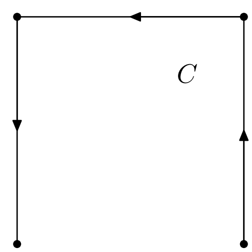


Figure 1. Courbe d'intégration C de la question 5b).

Soit C_1 le segment allant de $(1,0)$ à $(1,1)$, C_2 celui allant de $(1,1)$ à $(0,1)$, C_3 celui allant de $(0,1)$ à $(0,0$ et C_4 celui de $(0,0)$ à $(1,0)$. On considère la région $D = [0,1]^2$. Voir la figure 2. On a alors $\partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ qui est orientée positivement par rapport à D. Par le théorème de Green, on a

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}A = \int_{C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4} F \bullet \mathrm{d}\vec{s}.$$

Pour calculer l'intégrale curviligne sur $C_1 \cup C_2 \cup C_3$, on devra donc calculer l'intégrale double sur D et l'intégrale curviligne sur C_4.

Pour l'intégrale double, on a

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2xy - 2xy = 0.$$

Il suit que l'intégrale double est nulle.

Pour l'intégrale curviligne, on paramétrise le segment par $\gamma(t) = \binom{t}{0}$, $t \in [0,1]$. On a

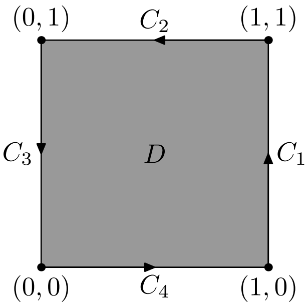


Figure 2. Région D et sa frontière divisée en quatre segments de la question 5b).

donc $F \circ \gamma(t) = \binom{\cos t}{0}$ et $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il suit que

$$\int_{C_4} F \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^1 \cos t \mathrm{d}t = \sin 1.$$

On a donc

$$\int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} F \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}A - \int_{C_4} F \bullet \mathrm{d}\vec{s} = -\sin 1.$$

Exercice 6. Calculer l'aire des régions suivantes.

a) L'intérieur de l'ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b) L'intérieur de l'astroïde paramétrée par $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$.

c) La lunule donnée par l'intersection de $\overline{B}\big((0,0),1\big)$ et $\overline{B}\big((0,1),1\big)$.

d) La lunule donnée par $\overline{B}\big((0,0),1\big) \setminus B\left((-1,0), \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$.

Solution. b) Soit D l'intérieur de l'astroïde. On utilise le champ de vecteurs $F(x,y) = \binom{y}{0}$. On a alors

$$\mathrm{Aire}(D) = \iint_D \mathrm{d}A = -\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}A = -\int_{\partial D} F \bullet \mathrm{d}\vec{s} = -\int_{\partial D} y \mathrm{d}x.$$

On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{Aire}(D) &= -\int_{\partial D} y \mathrm{d}x \\ &= -\int_0^{2\pi} \sin^3 t(-3\cos^2 t \sin t) \mathrm{d}t \\ &= 3\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^4 t \mathrm{d}t \end{aligned}$$

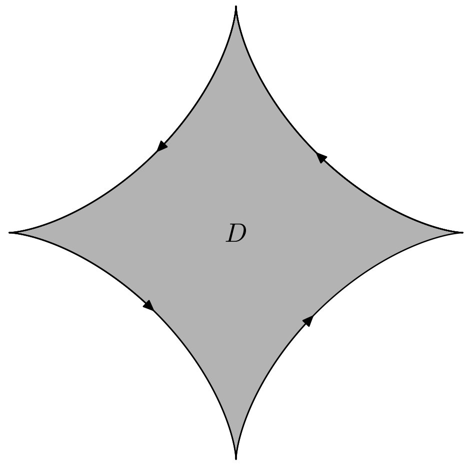


Figure. Astroïde avec orientation et la région D du numéro 6b)

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \sin^3 t & v' = \cos^2 t \sin t \\ u' = 3\sin^2 t \cos t & v = -\dfrac{\cos^3 t}{3} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
&= 3\frac{\cos^3 t \sin^3 t}{3}\bigg|_0^{2\pi} + 3\int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t \mathrm{d}t \\
&= 3\int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t \mathrm{d}t \\
&= 3\int_0^{2\pi} \cos^2 t(1-\sin^2 t) \sin^2 t \mathrm{d}t \\
&= -3\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^4 t \mathrm{d}t + 3\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t \mathrm{d}t \\
&= -\mathrm{Aire}(D) + 3\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \sin t & v' = \cos^2 t \sin t \\ u' = \cos t & v = -\dfrac{\cos^3 t}{3} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}\mathrm{Aire}(D) &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t \mathrm{d}t \\
&= -\frac{\sin t \cos^3 t}{3}\bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos^4 t \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos^4 t \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos^2 t(1-\sin^2 t) \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\mathrm{Aire}(D) + \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos^2 t \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

donc

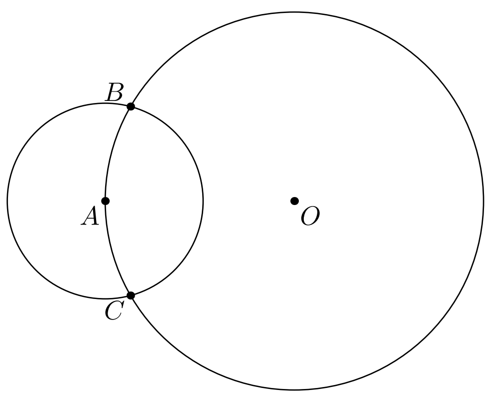
$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \cos t & v' = \cos t \\ u' = -\sin t & v = \sin t \end{array}}$$

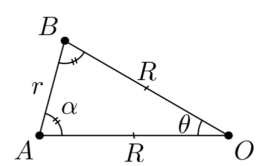
$$\begin{aligned}
\frac{8}{3}\text{Aire}(D) &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \mathrm{d}t \\
&= \sin t \cos t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \sin^2 t \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2 t \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t) \mathrm{d}t \\
&= 2\pi - \frac{8}{3}\text{Aire}(D),
\end{aligned}$$

d'où on déduit que $\frac{16}{3}\text{Aire}(D) = 2\pi$, c'est-à-dire $\text{Aire}(D) = \frac{3\pi}{8}$.

Bien sûr, on aurait pu résoudre cela sur Mathematica ou sur Sage, mais c'est une bonne idée de faire quelque calcul fastidieux de temps en temps, pour se refaire la main.

d) Les deux disques sont dessinés sur la figure suivante, où on indique leur points d'intersection B et C, leur centre centre A et O et, sur le triangle OAB, les angles θ et α, que nous devrons calculer pour connaître les bornes d'intégration.





On pose $R = 1$ et $r = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Par la loi des cosinus, on a $r^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos\theta$. En isolant, on trouve $\cos\theta = \frac{2R^2 - r^2}{2R^2}$, c'est-à-dire

$$\cos\theta = \frac{2 - (2 - \sqrt{3})}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Il suit que $\theta = \frac{\pi}{6}$.

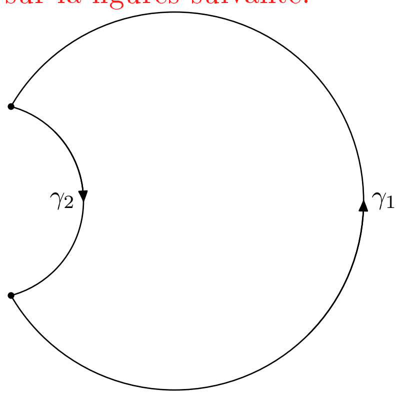
Ensuite, comme le triangle OAB est isocèle, on a $2\alpha + \theta = \pi$ et donc $\alpha = \frac{5\pi}{12}$. De plus, par la loi des cosinus, on peut trouver la valeur de $\cos\frac{5\pi}{12}$:

$$R^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\tfrac{5\pi}{12} \quad \Rightarrow \quad \cos\tfrac{5\pi}{12} = \frac{r}{2R} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

On est maintenant prêt à intégrer. On utilise les formules $\iint_D \mathrm{d}A = \int_\gamma x\mathrm{d}y = -\int_\gamma y\mathrm{d}x$. On pose

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \left[-\tfrac{5\pi}{6}, \tfrac{5\pi}{6}\right], \qquad \text{et} \qquad \gamma_2(s) = \begin{pmatrix} r\cos(-s) - 1 \\ r\sin(-s) \end{pmatrix}, \quad s \in \left[-\tfrac{5\pi}{12}, \tfrac{5\pi}{12}\right].$$

Ces deux arcs sont représentés sur la figures suivante.



On peut maintenant calculer l'aire. On a

$$\text{Aire} = -\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} y\mathrm{d}x = -\int_{\gamma_1} y\mathrm{d}x - \int_{\gamma_2} y\mathrm{d}x.$$

Pour la première intégrale, on a

$$\begin{aligned} -\int_{\gamma_1} y\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{5\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin t \sin t\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}(t - \cos t \sin t)\Big|_{-\frac{5\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Pour la seconde intégrale, on trouve

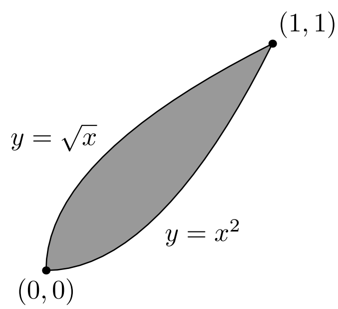
$$\begin{aligned} -\int_{\gamma_2} y\mathrm{d}x &= -\int_{-\frac{5\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} r\sin(-s) r\sin(-s)\mathrm{d}s \\ &= r^2 \int_{\frac{5\pi}{12}}^{-\frac{5\pi}{12}} \sin^2 u\mathrm{d}u && \text{(avec } u = -s\text{)} \\ &= -r^2 \int_{-\frac{5\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \sin^2 u\mathrm{d}u \\ &= -\frac{r^2}{2}(u - \sin u \cos u)\Big|_{-\frac{5\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{r^2}{2}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) \\
&= -\frac{r^2}{2}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{2-\sqrt{3}}{4}\left(\frac{5\pi}{3} - 1\right).
\end{aligned}
$$

En combinant, on obtient

$$
\text{Aire} = \left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{2-\sqrt{3}}{4}\left(\frac{5\pi}{3} - 1\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{5\pi}{3} + \frac{1}{2}.
$$

Exercice 7. On veut calculer l'aire de la région R suivante



On rappelle que $\text{Aire}(R) = \iint_R \mathrm{d}A = \int_{\partial R} x\mathrm{d}y = -\int_{\partial R} y\mathrm{d}x$. Considérer le raisonnement suivant :

> On paramétrise la frontière par les deux courbes par $\gamma_1(x) = \binom{x}{x^2}$, $x \in [0,1]$ et $\gamma_2(x) = \binom{x}{\sqrt{x}}$, $x \in [0,1]$.
>
> On utilise la formule $\text{Aire}(R) = \iint_R \mathrm{d}A = -\int_{\gamma_1} y\mathrm{d}x + \int_{-\gamma_2} x\mathrm{d}y$. On intègre sur $-\gamma_2$ pour changer le sens de parcours. On trouve $-\int_{\gamma_1} y\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}$ et $\int_{-\gamma_2} x\mathrm{d}y = -\frac{1}{3}$ et donc $\text{Aire}(R) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$.

Il est clair que $\text{Aire}(R)$ ne peut pas être négatif, donc où est l'erreur ?

Solution. La formule d'aire $\text{Aire}(R) = \iint_R \mathrm{d}A = -\int_{\gamma_1} y\mathrm{d}x + \int_{-\gamma_2} x\mathrm{d}y$ est fausse. On a soit $\text{Aire}(R) = \int_{\partial R} x\mathrm{d}y$ ou $\text{Aire}(R) = -\int_{\partial R} y\mathrm{d}x$, mais pas celle utilisée. En fait, il y a d'autres options possibles, mais le problème dans la formule utilisée est que l'intégrande est différent sur γ_1 et sur γ_2.

Exercice 8. Soit le champ de vecteur $F(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x^2} \\ x \end{pmatrix}$. On pose $a = \int_\gamma F \bullet \mathrm{d}\vec{s}$, où γ est le segment de droit allant de $(-1,-1)$ à $(1,-1)$.

a) Calculer $\int_C F \bullet \mathrm{d}\vec{s}$ en terme de a, où C est le segment de droite allant de $(-1,-1)$ à $(1,1)$.

b) Calculer $\int_{C_1} F \bullet \mathrm{d}\vec{s}$ en terme de a, où C_1 est l'arc de cercle centré à l'origine allant de $(-1,-1)$ vers $(1,1)$ et passant par le deuxième cadran.

Exercice 9. Soit le champ de vecteurs

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

a) Peut-on appliquer le théorème de Green pour calculer l'intégrale curviligne de f le long du cercle $x^2+y^2=1$ dans le sens anti-horaire ?

b) Peut-on le long du cercle $(x-2)^2+y^2=1$?

c) Calculer directement l'intégrale de la question a).

d) Utiliser le théorème de Green pour calculer l'intégrale curviligne de f le long de la courbe polaire

$$r(\theta) = 2 + \sin^2\theta + \cos\theta.$$

(Ne calculez pas l'intégrale curviligne directement!)

Solution. a) Non, car $(0,0)$ est dans l'intérieur de la courbe, mais F n'est pas définie en $(0,0)$.

b) Oui, car f est de classe C^1 partout à l'intérieur de ce cercle.

c) La réponse est 2π.

d) La courbe C et la courbe r délimitent ensemble une région D. Les deux courbes sont orientées dans le sens anti-hoaire, donc pour que $\partial D = C \cup r$ soit orientée positivement, on parcourt C dans le sens inverse, c'est-à-dire que $\partial D = (-C) \cup r$ est orientée positivement. Sur D, f est classe C^1 et le théorème de Green s'applique. Comme $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$, on a

$$0 = \iint_D 0 \mathrm{d}A = \int_{(-C)\cup r} f \bullet \mathrm{d}\vec{s}.$$

Il suit que

$$\int_r f \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_C f \bullet \mathrm{d}\vec{s} = 2\pi.$$

Exercice 10. Soit le champ de vecteur

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

a) Soit γ une courbe, une courbe fermée et simple qui ne passe pas par l'orgine, mais qui l'entour. Calculer $\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}s$.

b) Ce champ de vecteurs est-il conservatif ? Si oui, trouver un champ scalaire g tel que $\nabla g = f$. Sinon, justifier.

Solution. a) Soit C le cercle unité centré à l'origine dans le sens anti-horaire. Soit $\alpha(t) = \binom{\cos t}{\sin t}$ son paramétrage. On a $f \circ \alpha(t) = \binom{\cos^2 t - \sin^2 t}{2\cos t \sin t}$, $\alpha'(t) = \binom{-\sin t}{\cos t}$ et $f \circ \alpha(t) \bullet \alpha'(t) = -\cos^2 \sin t + \sin^3 t + 2\cos^2 t \sin t$. On obtient

$$\int_C f \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^{2\pi} (\sin^3 t + \cos^2 t \sin t)\mathrm{d}t = 0.$$

Maintenant, pour γ comme dans le question, on divise la courbe en courbes de Jordan $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ Pour chaque γ_j, si l'origine n'est pas dans l'intérieur de la courbe, alors par le théorème de Green, on a $\int_{\gamma_j} f \bullet \mathrm{d}\vec{s} = 0$, car $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$ partout sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si l'origine est à l'intérieur de γ_j, alors on considère la région D entre γ_j et α qui ne contient pas l'origine. Alors, comme précédemment, on a $\int_{\gamma_j} f \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_\alpha f \bullet \mathrm{d}\vec{s} = 0$.

Comme $\int_{\gamma_j} f \bullet \mathrm{d}\vec{s} = 0$ pour tout j, on conclut que l'intégrale curviligne de f sur γ est également nulle.

b) Oui, au a) on a montré que f possèdait la propriété d'indépendance du chemin. On cherche $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\nabla g = f$. Ainsi, on a

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

On intègre par rapport à y :

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y \\ &= x\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} \\ &= -\frac{x}{u} + h(x) \\ &= -\frac{x}{x^2+y^2} + h(x), \end{aligned} \qquad \boxed{\begin{aligned} &u = x^2+y^2 \\ &\mathrm{d}u = 2y\mathrm{d}y \end{aligned}}$$

où h est une fonction qui dépend seulement de x. On dérive notre résultat par rapport à x :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} + h'(x) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + h'(x).$$

Comme on a également $\frac{\partial g}{\partial x} = f_2$, il suit que $h'(x) = 0$. On peut donc prendre la fonction $g(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$.

Exercice 11. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine simplement connexe dont la frontière ∂D est une courbe régulière. Utilisez le théorème de Green pour montrer que l'intégrale curviligne de toute courbe fermée d'un champ conservatif sur D est nulle (donc que le champ possède la propriété d'indépendance du chemin). Qu'est-ce qui ne fonctionne pas dans cette démarche si D n'est pas simplement connexe ?

Solution. Ce qui ne fonctionne pas, c'est qu'on ne sait pas si la fonction est de classe C^1 à l'intérieur de la courbe, donc il est possible que le théorème de Green ne s'applique pas, si D n'est pas simplement connexe.

Exercice 12. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine simplement connexe dont la frontière ∂D est une courbe régulière. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteur de la forme

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}.$$

Montrer que si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

alors f est conservatif. Qu'est-ce qui ne fonctionne pas dans la preuve si D n'est pas simplement connexe ?

Solution. C'est le même problème qu'au numéro précédent.

Exercice 13. Soit l'EDO $p(x,y) + q(x,y)y' = 0$. Montrer que si p et q sont de classe C^1 sur un domaine simplement connexe D telle que ∂D est une courbe régulière et si p et q satisfont à la condition d'intégrabilité, alors l'EDO est exacte.[1]

Solution. On rappelle qu'une EDO est exacte s'il existe une fonction à valeurs réelles φ telle que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = p \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = q.$$

On pose $F(x,y) = \binom{p(x,y)}{q(x,y)}$. La condition d'intégrabilité signifie que

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y},$$

ce qui revient à dire que $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$. Ainsi, pour tout courbe de Jordan γ dans D, comme D est simplement connexe, il y a une région $E \subseteq D$ telle que $\partial E = \gamma$, donc par le théorème de Green, on a

$$\int_\gamma F \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \iint_E 0 \mathrm{d}A = 0.$$

[1] On a énoncé au début du cours que ceci était vrai lorsque $D = \mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe, on montre ici une version plus générale de l'énoncé vu au début du cours.

Il suit que F possède la propriété d'indépendance des chemins, donc F est conservatif. Ainsi, il existe bien φ telle que $\nabla\varphi = F$, comme voulu.

Exercice 14. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine simplement connexe. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}^2$; $f \mapsto \left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}\right)$ un champ de vecteurs de classe C^2.

a) Sous quelles conditions les champs de vecteurs

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ -f_2 \end{pmatrix} \qquad\qquad G = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

sont-ils conservatifs ?

b) Si F et G sont conversatifs, alors f est-it conservatif ?

Exercice 15. Soit D un domaine. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs de classe C^1 de la forme

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}.$$

Soit $\vec{x} \in D$ un point. On pose $A := \mathrm{Jac}_{\vec{x}}\, f$. On dit que f *préserve les angles* au point $\vec{x}$ s'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que pour toute paire de courbes $\gamma_1, \gamma_2\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to D$ telle que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \vec{x}$, on ait

$$(A\gamma_1'(0)) \bullet (A\gamma_2'(0)) = \lambda\gamma_1'(0) \bullet \gamma_2'(0).$$

a) Soit B une matrice 2×2. Supposons que B préserve les angles. On choisit γ_1 de sorte que $\gamma_1'(0) = \vec{e}_1$, un vecteur de la base canonique (donc $\vec{e}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$). Supposons que $Be_1 = \alpha e_1$. Montrez qu'alors B est une dilatation, c'est-à-dire que

$$B = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où C est une constante que vous devez déterminer.

b) Montrer qu'il existe une rotation R telle que $R \circ A$ satisfait aux hypothèses du a). (On tient pour acquis que R préserve les angles et donc que $R \circ A$ préserve aussi les angles.)

c) La partie b) permet de conclure que

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

pour un certain θ et C fixé. Supposons que f préserve les angles pour tout $\vec{x} \in D$. Montrer que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

d) Une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 qui préserve les angles et qui est injective est appelée une *application conforme*. Montrer que si $f = \binom{P}{Q}$ est une application conforme et si D est simplement connexe, alors

$$\int_C (P\mathrm{d}x - Q\mathrm{d}y) = 0 \quad \text{et} \quad \int_C (P\mathrm{d}y + Q\mathrm{d}x) = 0$$

pour toute courbe fermée $C \subset D$ de classe C^1.

Exercice 16. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine et ∂D sa frontière formée d'un fini de courbes régulières. Soit $F = \binom{P}{Q}$ un champ de vecteurs de classe C^1. Montrer que

$$\int_{\partial D} F \bullet \mathrm{d}\vec{n} = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \mathrm{d}A.$$

(Voir l'exercice 22 de la série sur les intégrales au besoin pour la notation $\mathrm{d}\vec{n}$.)

Solution. On pose $G = \binom{-Q}{P}$. D'une part, on voit que

$$\int_{\partial D} G \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\partial D} \big(-Q\mathrm{d}x + P\mathrm{d}y\big) = \int_{\partial D} F \bullet \mathrm{d}\vec{n}.$$

D'autre part, si on applique le théorème de Green à G, alors on obtient

$$\int_{\partial D} G \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \mathrm{d}A.$$

En combinant, on trouve la formule souhaitée.

Exercice 17. Intégration par parties 1 (Première identité de Green). Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine tel que ∂D est formée d'un nombre fini de courbes régulières. Soit $\varphi, \psi\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ des champs scalaires tels que φ est de classe C^2 et ψ est de classe C^1. Montrer que

$$\iint_D \nabla\psi \bullet \nabla\varphi \mathrm{d}A = \int_{\partial D} \psi \nabla\varphi \bullet \mathrm{d}\vec{n} - \iint_D \psi \Delta\varphi \mathrm{d}A$$

où $\Delta\varphi = \nabla \bullet \nabla\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$.

Solution. La démarche devient un peu plus évidente si on écrit l'équation de la question

$$\int_{\partial D} \psi \nabla\varphi \bullet \mathrm{d}\vec{n} = \iint_D (\nabla\psi \bullet \nabla\varphi + \psi\Delta\varphi) \mathrm{d}A.$$

On voudrait donc appliquer la formule du numéro 16 au champ de vecteurs $\psi\nabla\varphi$. On notera $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \varphi_x$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varphi_y$. On a $\psi\nabla\varphi = \big(\psi\varphi_x, \psi\varphi_y\big)$, car ψ est une fonction à valeurs réelles, donc $\psi(x, y)$ est un scalaire. On a

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi\varphi_x) = \varphi_x \frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\psi\varphi_y) = \varphi_y \frac{\partial\psi}{\partial y} + \psi \frac{\partial\varphi_y}{\partial y}.$$

Comme φ est de classe C^2, on peut échanger l'ordre des dérivées partielles, donc $\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}$. On a donc

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi\varphi_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\psi\varphi_x) = \left(\varphi_x\frac{\partial \psi}{\partial x} + \varphi_y\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \psi\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right).$$

La première parenthèse est exactement $\nabla\varphi \bullet \nabla\psi$ et la deuxième, $\Delta\varphi$. Par la formule du numéro 16, on obtient le résultat voulu.

Exercice 18. Intégration par partie 2 (Deuxième identité de Green). Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine tel que ∂D est formée d'un nombre fini de courbes régulières. Soit $\varphi, \psi \colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ des champs scalaires classe C^2. Montrer que

$$\int_{\partial D} \Big(\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi\Big) \bullet \mathrm{d}\vec{n} = \iint_D \Big(\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi\Big)\mathrm{d}A.$$

Remarque. On retrouve parfois la notation $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}$ pour signifier « la dérivée directionnelle dans la direction du vecteur normal », donc on a simplement $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} = \nabla\varphi \bullet \vec{n}$ (et c'est un champ scalaire). On pourrait donc réécrire les identités des exercices 17 et 18 avec cette notation. Par exemple, l'identité 2 deviendrait

$$\int_{\partial D} \Big(\psi\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} - \varphi\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}\Big)\mathrm{d}s = \iint_D \Big(\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi\Big)\mathrm{d}A.$$

2. Théorème de Stokes

Exercice 19. Dire si les domaines suivants de $\mathbb{R}^3$ sont simplement connexes.

a) $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$;

b) $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{d}\}$, où $\vec{d}$ est la droite $t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$;

c) La boule $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

Solution. a) Oui b) Non c) Oui

Exercice 20. Soit C le cylindre $x^2 + y^2 = 1$, $z \in [0, 1]$, et C' la frontière du volume $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ z \in [0, 1]\}$.

a) Quelle est la différence entre C et C' ? Dessiner les deux surfaces.

b) Si $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs de classe C^1, que peut-on dire de $\int_{C'} \nabla \times F \bullet \mathrm{d}\vec{S}$? Peut-on dire la même chose de $\int_C \nabla \times F \bullet \mathrm{d}\vec{S}$? (Dans les deux intégrales, l'orientation est prise de sorte que $\vec{n} = (1, 0, 0)^T$ au point $\big(1, 0, \frac{1}{2}\big)^T$.)

Solution. a) La surface C' est composée de trois morceaux : le cylindre C et les disques D_0 et D_1, où D_0 : $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$ et D_1 : $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 1$. Ainsi, C' est une surface fermée et elle contient un volume, alors que C n'est pas une surface fermée et ne renferme pas un volume.

b) Puisque $\partial C' = \emptyset$, par le théorème de Stokes, on a que $\int_{C'} \nabla \times F \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0$.

Dans le cas de C, le bord de C est formé de deux cercles, donc l'intégrale ne donnera pas nécessairement 0.

Exercice 21. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{\partial C} \begin{pmatrix} y + \sin(x^2) \\ z + 2^{\sin y} \\ -x + 3z \end{pmatrix} \bullet \mathrm{d}\vec{s}$, où C est le cône $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$, et ∂C est le bord du cône, orientée de l'axe des x vers l'axe des y.

b) $\displaystyle\int_{\partial C} \begin{pmatrix} xy \\ \sin(y) \\ yz \end{pmatrix} \bullet \mathrm{d}\vec{s}$, où C est le cylindre $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ et ∂C est le bord du cylindre, orientée de sorte que les deux cercles vont de l'axe des x vers l'axe des y.

c) $\displaystyle\int_{\partial S} \begin{pmatrix} (x-1)x^3 \\ x^2 - z^2 \\ z^2 e^z \end{pmatrix} \bullet \mathrm{d}\vec{s}$, où S est la surface de révolution obtenue par la rotation de la courbe $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ dans le plan xy autour de l'axe des y et ∂S est le bord de S orientée de sorte le cercle va de l'axe des z vers l'axe des x.

Solution. a) Soit F le champ de vecteurs dans l'intégrande de la question. On souhaite utiliser le théorème de Stokes. On n'est pas obligé d'utiliser le cône C, mais pour rester dans l'esprit de l'exercice, nous l'utiliserons. D'abord, calculons le rotationnel du champ de vecteurs pour voir s'il est plus simple. On a

$$\nabla \times F(x, y, z) = \begin{vmatrix} i & \partial_x & y + \sin(x^2) \\ j & \partial_y & z + 2^{\sin y} \\ k & \partial_z & -x + 3z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il est assez simple, donc tentons d'utiliser le théorème. On a

$$\int_{\partial C} F \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \int_C \nabla F \bullet \mathrm{d}\vec{S}.$$

On paramétrise le cône par

$$\Gamma(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ r \end{pmatrix}.$$

On calcule le vecteur normal :

$$\mathrm{d}\Gamma = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} -r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ r \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur normal pointe vers « l'intérieur » du cône, c'est-à-dire vers l'axe des z négatif. En effet, au point $\Gamma\left(\frac{1}{2},0\right) = \left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)^T$, on a que $N\left(\frac{1}{2},0\right) = \left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)^T$. C'est la bonne orientation pour que ∂C soit positivement orientée par rapport à C.

En effet, si un marcheur est debout sur le bord de la surface dans la direction de N au-dessus de l'axe des x positifs et fait face dans le direction de l'orientation de ∂C, alors celui-ci regarde dans le direction parallèle à l'axe des y vers les y positifs et la surface se trouve à sa gauche. Une autre façon de s'en convaincre est de pointer le pouce de la main droite dans le direction de N et de vérifier que les doigts pointent dans le sens de ∂C.

Ensuite, on a $\nabla \times F \circ \Gamma \bullet N = r\cos\theta + r\sin\theta - r$. On a donc

$$\int_C \nabla \times F \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r\cos\theta + r\sin\theta - r)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = -2\pi \int_0^1 r\mathrm{d}r = -\pi.$$

Exercice 22. Soit S l'hémisphère nord $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$, orienté de sorte que $\vec{n} = (0,0,1)^T$ au point $(0,0,1)^T$. Calculer l'intégrale $\int_S \nabla \times F \bullet \mathrm{d}\vec{S}$, où

a) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{x^2} \\ \sin(y^3) \\ \sqrt{z^2+1} \end{pmatrix}$ b) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2 e^{x^3+y^2} \\ \sin(x^2y^5z^3) \\ x+y \end{pmatrix}$

Exercice 23. Calculer les intégrales de flux suivantes en changeant de surface.

a) $\displaystyle\int_S \mathrm{rot}(F) \bullet \mathrm{d}\vec{S}$, où $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2e^z \\ e^{y^2}+z^2 \\ xz \end{pmatrix}$ et S est l'hémisphère nord $x^2+y^2+z^2=1$, $0 \leq z \leq 1$, orientée de sorte que $\vec{n} = (0,0,1)^T$ au point $(0,0,1)^T$.

b) $\displaystyle\int_C \mathrm{rot}(F) \bullet \mathrm{d}\vec{S}$, où $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2(y-1)^3 \\ \sin(y^2) \\ yz + x(y-1) \end{pmatrix}$ et C est le cylindre $x^2+z^2=1$, $0 \leq y \leq 1$, orientée de sorte que $\vec{n} = (0,0,1)^T$ au point $(0,\frac{1}{2},1)$.

Solution. a) Si on appliquait directement le théorème de Stokes, on devrait intégrer $\int_{\partial S} F \bullet \mathrm{d}\vec{s}$, mais la deuxième composante de F contient un e^{y^2}, qui sera probablement trop difficile à calculer. À la place, on utilise le théorème de Stokes pour calculer l'intégrale de flux à travers le disque $D: x^2+y^2 \leq 1$, $z=0$.

On voit que $\partial D = \partial S$. Ensuite, pour que ∂S soit orienté positivement par rapport à S, le cercle ∂S est orienté allant de l'axe des x vers l'axe des y. En effet, si le pouce de la main droite pointe vers l'axe des z (dans le direction de $\vec{n}(0,0,1)$), alors les doigts suivent le cercle ∂S et ils s'enroulent dans le sens allant de l'axe des x vers l'axe des y.

Pour que D soit orienté positivement par rapport à $\partial S = \partial D$, il faut que son vecteur normal pointe directement vers le haut (l'axe des z). On peut le vérifier de la même façon que ci-haut.

Ainsi, avec ces orientations, le théorème de Stokes appliqué deux fois nous donne

$$\int_S \nabla \times F \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\partial S} F \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\partial D} F \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_D \nabla \times F \bullet \mathrm{d}\vec{S}.$$

L'avantage de la surface D est que son vecteur normal est de la forme $(0, 0, *)^T$.

Calculons maintenant cette intégrale. On paramétrise D par les coordonnées polaires

$$\Gamma(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{d}\Gamma(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

On voit que N pointe vers le haut, donc il est déjà bien orienté. Ensuite, on a

$$F \circ \Gamma(r,\theta) = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On met un astérisque pour signifier que c'est une quantité que l'on peut calculer, mais on ne prend pas la peine de le faire, puisqu'elle sera multipliée par 0 sous peu. Enfin, on a

$$F \circ \Gamma(r,\theta) \bullet N = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Il suit que $\int_D \nabla \times F \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0$.

Conclusion : $\int_S \nabla \times F \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0$.

Exercice 24. Soit le champ de vecteurs

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

Soit S l'hémisphère nord, duquel est retiré le pôle nord

$$S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0, z \neq 1\},$$

orienté avec les vecteurs normaux pointant vers l'extérieur.

a) Calculer $\int_{\partial S} \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r}$.

b) Calculer $\int_S \nabla \times \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$.

c) Ceci contredit-il le théorème de Stokes ?

Solution. c) Non, car $\vec{v}$ n'est pas de classe C^1 sur S, donc le théorème de Stokes ne s'applique pas.

Exercice 25. Soit C le cylindre

$$C = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = 1,\ z \in [0,a]\},$$

orienté avec les vecteurs normaux pointant vers l'exterieur. En utilisant le théorème de Stokes, calculer $\int_{\partial C} \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r}$ pour toutes les valeurs de $a > 0$, où $\vec{v}$ est le champ de vecteur $(*)$ du numéro 24. Pourquoi le théorème de Stokes s'applique-t-il dans ce cas ?

Solution. Puisque $\vec{v}$ est de classe C^1 sur C (en effet, C ne coupe pas l'axe des z), on peut appliquer le théorème de Stokes. Un calcul direct montre que $\nabla \times \vec{v} = 0$, donc on a

$$\int_{\partial C} \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_C 0 \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

Exercice 26. Soit le champ de vecteurs

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit C_r le cercle de rayon r dans le plan xy : $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$.

a) Calculer $\nabla \times \vec{F}$.

c) Calculer

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{s}.$$

d) Calculer $\nabla \times \vec{F} \bullet \vec{n}$, où $\vec{n}$ est le vecteur normal unitaire de C_r pointant dans la direction de l'axe des z.

Exercice 27. Soit C le cercle $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$, orienté dans le sens allant de l'axe des x vers l'axe des y. Soit le champ de vecteurs

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ xz \\ e^{z^2} z \end{pmatrix}.$$

Calculer $\int_C \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{s}$.

Exercice 28. Quel le flux de $\nabla \times \vec{F}$, pour n'importe quel champ de vecteurs $\vec{F}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$, à travers un ellipsoïde ?

Solution. Le flux sera toujours nul. En effet, on peut s'en convaincre de plusieurs façon. Par exemple, comme l'ellipsoïde n'a pas de bord, lorsqu'on applique le théorème de Stokes, on obtient une intégrale sur l'ensemble vide, qui donne toujours zéro.

Sinon, on peut diviser l'ellipsoïde en deux parties E_1 et E_2. Par exemple, on peut prendre E_1 comme l'hémisphère nord et E_2, l'hémisphère sud. Dans ce cas, on a $E = E_1 \cup E_2$ et

$\partial E_1 = \partial E_2$. Pour que l'orientation soit positive, ∂E_1 et ∂E_2 doivent être parcourues dans les sens opposés, c'est-à-dire que $\partial E_2 = -\partial E_1$. Par le théorème de Stokes, on a alors

$$\int_E \nabla \times F \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\partial E_1 \cup -\partial E_1} F \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\partial E_1} F \bullet \mathrm{d}\vec{s} - \int_{\partial E_1} F \bullet \mathrm{d}\vec{s} = 0.$$

Exercice 29. Soit P la partie de paraboloïde $x^2 + z^2 = y$, $y \in [0, 1]$. On prend l'orientation qui pointe vers l'extérieur de P. Soit le champ de vecteurs

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2z + x^2 \cos(y) \\ e^{z^2} \\ \sin z + x^2 \end{pmatrix}.$$

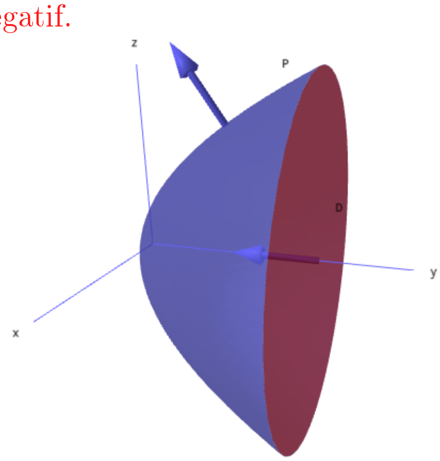
Calculer le flux de $\nabla \times \vec{v}$ à travers P.

Solution. Commençons par calculer le rotationnel de $\vec{v}$. On a

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & \partial_x & 2z + x^2 \cos(y) \\ j & \partial_y & e^{z^2} \\ k & \partial_z & \sin z + x^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2ze^{z^2} \\ 2 - 2x \\ x^2 \sin y \end{pmatrix}.$$

On voit que la première composante et la troisième composante sont assez compliquées. Ainsi, si on peut trouver une surface pour laquelle son vecteur normal est de la forme $(0, *, 0)$, alors on pourra sûrement intégrer.

On considère le disque $D : x^2 + z^2 \leq 1$, $y = 1$. On a alors que $\partial P = \partial D$. Puisque l'orientation de P est vers l'extérieur, on a que ∂P est parcouru de l'axe des x vers l'axe des z. Ainsi, pour avoir une orientation compatible, on prend le vecteur normal de D qui pointe vers l'axe des y négatif.



Ensuite, on se prépare à calculer l'intégrale sur D. On paramétrise et on calcule le vecteur normal

$$\Gamma(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ 1 \\ r\sin\theta \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{d}\Gamma(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ 0 & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N(r, \theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur normal pointe dans le mauvais sens, donc on fera notre calcul avec $-N$. On a ensuite

$$\nabla\times\vec{v}\circ\Gamma(r,\theta)=\begin{pmatrix} * \\ 2-2r\cos\theta \\ * \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \nabla\times\vec{v}\circ\Gamma(r,\theta)\bullet -N(r,\theta)=0-2r+2r^2\cos\theta+0.$$

(L'astérisque représente une quantité que l'on pourrait calculer, mais on ne le fait pas puisqu'elle sera multipliée par zéro.) On peut enfin calculer l'intégrale. On a

$$\begin{aligned}
\int_P \nabla\times v\bullet \mathrm{d}\vec{S} &= \int_{\partial P} \vec{v}\bullet\mathrm{d}\vec{s} && \text{(par le théorème de Stokes)}\\
&= \int_{\partial D} \vec{v}\bullet\mathrm{d}\vec{s} && \text{(car } \partial P=\partial D \text{ et ont la même orientation)}\\
&= \int_D \nabla\times\vec{v}\bullet\mathrm{d}\vec{S} && \text{(par le théorème de Stokes)}\\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}(-2r+2r^2\cos\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\\
&= \int_0^1 -4\pi r\mathrm{d}r && \text{(car } \textstyle\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta=0)\\
&= -2\pi.
\end{aligned}$$

Exercice 30. Soit le C cercle $x^2+z^2=1$, $y=0$, orienté dans le sens allant de l'axe des z vers l'axe des x. Soit le champ de vecteurs

$$\vec{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} y-1 \\ (y-1)e^{y^3-y^2}+ye^{(y-1)^2} \\ z(y-1)\end{pmatrix}.$$

Calculer $\int_C \vec{F}\bullet\mathrm{d}\vec{s}$. (Consultez l'exemple 2.4.13 des notes au besoin.)

Solution. Sur le cercle C, le champ de vecteurs a la forme $F(x,0,z)$, qui est assez compliqué. Si on avait plutôt $F(x,1,z)=(0,1,0)^T$, il serai aisé d'intégrer. On veut donc utiliser le théorème de Stokes pour porter l'intégrale curviligne sur C sur $C_1: x^2+z^2=1$, $y=1$.

Commençons par calculer le rotationnel. On a

$$\nabla\times F(x,y,z)=\begin{vmatrix} i & \partial_x & y-1 \\ j & \partial_y & (y-1)e^{y^3-y^2}+ye^{(y-1)^2} \\ k & \partial_z & z(y-1)\end{vmatrix}=\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -1\end{pmatrix}.$$

On cherche une surface S pour laquelle $\partial S=C\cup C_1$. Si on fait un dessin, on peut voir que le cylindre $S: x^2+z^2=1$, $y\in[0,1]$ fait l'affaire.

L'orientation de C donnée est celle allant de l'axe des z à l'axe des x. Pour que l'orientation de S soit compatible, il faut que le vecteur normal pointe vers l'extérieur. Pour que l'orientation de C_1 soit compatible, il faut que ∂C_1 alle de l'axe des x vers l'axe des z. Avec ces orientations, on peut appliquer le théorème de Stokes pour obtenir

$$\int_S \nabla \times \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \int_{C \cup C_1} \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{s}$$

ce qui donne

$$\int_C \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_S \nabla \times \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{S} - \int_{C_1} \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{s}.$$

Commençons par calculer l'intégrale de flux sur S. On paramétrise et on calcule le vecteur normal

$$\Gamma(\theta, y) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ y \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{d}\Gamma(\theta, y) = \begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \cos\theta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N(\theta, y) = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{pmatrix},$$

où $(\theta, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$. En $\Gamma\left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)^T$, le vecteur normal est $N = (-1, 0, 0)^T$. Ce vecteur pointe vers l'intérieur du cylindre, donc il est dans le mauvais sens. On fera donc nos calculs avec $-N$. Ensuite, on a

$$\nabla \times \vec{F} \circ \Gamma(\theta, y) = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla \times \vec{F} \circ \Gamma(\theta, y) \bullet -N(\theta, y) = \cos\theta \sin\theta - \sin\theta.$$

L'intégrale est donc

$$\int_S \nabla \times \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos\theta \sin\theta - \sin\theta) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = 0.$$

Ensuite, on calcule l'intégrale de flux sur C_1. On paramétrise et on calcule le vecteur tangent

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 1 \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma'(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on a

$$\vec{F} \circ \gamma(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{F} \circ \gamma(\theta) \bullet \gamma'(\theta) = 0 + 0 + 0.$$

Ainsi, l'intégrale sera nulle.

Conclusion : $\int_C \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{s} = 0 + 0 = 0$.

Exercice 31. Soit le champ de vecteurs

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz^2 + 1 \\ e^{y^2} \\ x^2 z \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que $\vec{F}$ est conservatif.

b) Calculer $\int_C \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{s}$, où C est le demi-cercle $x^2 + y^2 = 1$, $y \leq 0$, $z = 0$, orienté dans le sens allant de $(-1, 0)$ à $(1, 0)$.

Solution. a) Puisque $\vec{F}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$, qui est simplement connexe, il suffit de montrer que le rotationnel est nul. On a

$$\nabla \times \vec{F}(x, y, a) = \begin{vmatrix} i & \partial_x & xz^2 + 1 \\ j & \partial_y & e^{y^2} \\ k & \partial_z & x^2 z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2xz + 2xz \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

b) Puisque $\vec{F}$ est conservatif, il possède la propriété d'indépendance du chemin. Soit d le segment de droite reliant $(-1, 0, 0)$ à $(1, 0, 0)$. On a

$$\int_C \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_d \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{s}.$$

On peut paramétrer d et calculer son vecteur tangent

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1, 1], \qquad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\vec{F} \circ \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{F} \circ \gamma(t) \bullet \gamma'(t) = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Enfin, on trouve

$$\int_d \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_{-1}^{1} 1 \mathrm{d}t = 2.$$

Conclusion : $\int_C \vec{F} \mathrm{d}\vec{s} = 2$.

3. Théorème de Gauss

Exercice 32. Calculer $\displaystyle\int_S F \bullet \mathrm{d}\vec{S}$, où

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ y \\ xz \end{pmatrix}$$

et S est la frontière du tétraèdre borné par les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $x + y + z = 1$.

Solution. Soit D le tétraèdre de la question. On veut appliquer le théorème de Gauss. La divergence de F est $\operatorname{div} F = 0 + 1 + x$. On a donc

$$\int_S F \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_D \operatorname{div} F \mathrm{d}V = \iiint_D (1 + x) \mathrm{d}V.$$

On peut décrire le domaine d'intégration par $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ et $0 \leq z \leq 1 - x - y$. On a donc

$$\begin{aligned}
\iiint_D (1+x)\mathrm{d}V &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-x-y} (1-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (1-x-y)(1-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (1-x+x^2-y+xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[y - xy + x^2y - \tfrac{y^2}{2} + x\tfrac{y^2}{2}\right]_0^1 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(1 - x + x^2 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x}{2} + \tfrac{x^2}{4}\right]_0^1 \\
&= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \\
&= \tfrac{7}{12}.
\end{aligned}$$

Exercice 33. Calculer le flux du champ de vecteurs

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -e^{x^2} \\ 2yxe^{x^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

à travers la demi-sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$, orientée avec les vecteurs normaux vers l'extérieur (c'est-à-dire $\vec{N}$ est parallèle à l'axe des y positif en $(0,1,0)$).

Solution. Soit S la demi-sphère décrite dans l'énoncé. Le champ de vecteurs est trop compliqué sur S. Essayons de voir si l'on peut changer de surface en utilisant le théorème de Gauss. D'abord, on pose D, le disque $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, et V le volume $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $y \geq 0$, de sorte que $\partial V = D \cup S$. On oriente D avec le vecteur normal $\vec{n} = (0,-1,0)$, de sorte qu'il pointe à l'extérieur de V. La divergence de F est $\operatorname{div}(F) = -2xe^{x^2} + 2xe^{x^2} + 0 = 0$. Ainsi, par le théorèm de Gauss, on a

$$0 = \iiint_V \operatorname{div} F \mathrm{d}V = \int_{S \cup D} F \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

et donc $\int_S F \bullet \mathrm{d}\vec{S} = -\int_D F \bullet \mathrm{d}\vec{S}$.

Pour calculer cette dernière intégrale, remarquons que sur D, on a $y = 0$ et donc $F(x,0,z) = (-e^{x^2}, 0, 0)^T$. De plus, le vecteur normal unitaire sur D est $\vec{n} = (0,-1,0)^T$, donc $F(x,0,z) \bullet \vec{n} = 0$. Il suit que $\int_D F \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0$.

Conclusion : $\int_S F \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0$.

Exercice 34. Soit S la partie de la sphère $x^2+y^2+z^2=4$ qui se trouve entre les plans $y=1$ et $y=-1$, orientée avec la normal vers l'extérieur. Calculer le flux du champ de vecteurs

$$\vec{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} y\cos(z^2) \\ x \\ e^{-y^2} \end{pmatrix}$$

au travers S. (Précision : les plans ne font pas partie de S.)

Solution. Comme le champ de vecteurs est compliqué sur S, on utilise le théorème de Gauss pour changer de surface. Soit $D_1 : x^2+z^2 \leq 1$, $y=1$, et $D_{-1} : x^2+z^2 \leq 1$, $y=-1$, les deux disques qui referment S. Soit V le volume contenu à l'intérieur de $S \cup D_1 \cup D_{-1}$. On oriente D_1 avec $\vec{n}=(0,1,0)^T$ et D_{-1} avec $\vec{n}=(0,-1,0)^T$, de sorte que $S \cup D_1 \cup D_{-1}$ soit orienté positivement par rapport à V. Par le théorème de Gauss, on a

$$\iiint_V \operatorname{div} F \mathrm{d}V = \int_{S\cup D_1 \cup D_{-1}} F \bullet \mathrm{d}\vec{S}.$$

On a donc trois intégrales à calculer.

Commençons par l'intégrale sur V. La divergence de F est $\operatorname{div}(F)=0+0+0$. Il suit que $\iiint_V \operatorname{div} F \mathrm{d}V = 0$.

Ensuite, on paramétrise D_1 et on calcule le vecteur normal :

$$\Gamma_1(r,\theta)=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ 1 \\ r\sin\theta \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{d}\Gamma_1=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ 0 & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cette orientation est contraire à celle choisie, donc on travaillera avec $-N$. On a ensuite

$$F\circ\Gamma_1(r,\theta)=\begin{pmatrix} * \\ r\cos\theta \\ * \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F\circ\Gamma_1(r,\theta)\bullet -N_1(r,\theta = r^2\cos\theta,$$

où chaque astérisque représente une quantité quelconque que l'on peut calculer, mais qui sera multipliée par 0, donc on ne se donne pas la peine de faire le calcul. Pour l'intégrale sur D_1, on trouve

$$\begin{aligned}\int_{D_1} F\bullet \mathrm{d}\vec{S} &= \int_0^1\int_0^{2\pi} F\circ\Gamma_1(r,\theta)\bullet N_1(r,\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi} r^2\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ &= 0.\end{aligned}$$

Les calculs pour D_{-1} sont analogues et on trouve également $\int_{D_{-1}} F\bullet\mathrm{d}\vec{S}=0$.

Conclusion : on a $\int_S F\bullet\mathrm{d}\vec{S}=0$.

Exercice 35. À l'aide du théorème de Gauss, calculer $\int_S F \bullet \mathrm{d}\vec{S}$, où S est l'hémisphère nord de la sphère $x^2+y^2+z^2=1$, orientée vers le haut, et

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2x \\ \frac{1}{3}y^3 + \tan z \\ x^2z + y^2 \end{pmatrix}.$$

Solution. Commençons par calculer la divergence de F. On trouve $\operatorname{div} F = x^2+y^2+z^2$.

Soit D le disque $x^2+y^2 \leq 1$, $z=0$. En combinant S et D, on obtient une surface $S \cup D$ fermée. Soit V le volume contenu dans $S \cup D$. On oriente D avec $\vec{n} = (0,0,-1)$, de sorte que le vecteur normal pointe vers l'extérieur de D. L'orientation sur S pointe déjà vers l'extérieur, donc $S \cup D$ est orientée positivement par rapport à V. On peut maintenant appliquer le théorème de Gauss. On obtient

$$\iiint_V \operatorname{div} F \mathrm{d}V = \int_{S \sup D} F \bullet \mathrm{d}\vec{S}.$$

On a donc deux intégrales à calculer.

Commençons par l'intégrale triple sur V. On passe au coordonnées sphériques, donc on fait le changement de variable

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad r\in[0,1],\ \theta\in[0,2\pi],\ \varphi\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right].$$

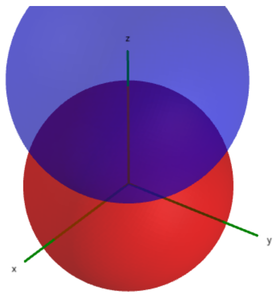
La jacobienne est

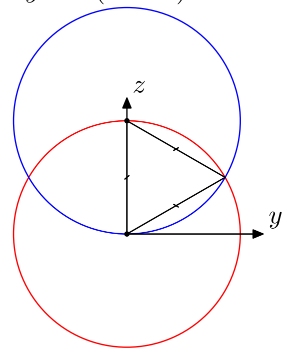
$$\det(\mathrm{Jac}_\Phi) = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r^2\cos\varphi.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \iiint \operatorname{div} F \mathrm{d}V &= \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{pi}{2}} r^2 r^2 \cos\varphi \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \left[\sin\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2\pi}{5}. \end{aligned}$$

Exercice 36. En utilisant le théorème de Gauss, calculer le volume contenu simultanément dans les deux spheres $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $S_2 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.





Indice. Avec les coordonnées sphériques longitude-lattitude, utiliser l'image ci-haut à droite de l'intersection des sphères avec le plan $x = 0$ pour déterminer l'intervalle de la latitude des paramétrages.

Exercice 37. Soit $h > 0$. Soit le volume et le champ de vecteurs

$$V = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leq h^2,\ z \in [-h, 2h]\}, \qquad F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3 - y^2 \\ y^3 - z^2 \\ \frac{1}{h^2}(x^2 - z^4) \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si possible, la valeur de h pour laquelle $\displaystyle\int_{\partial V} F \bullet \mathrm{d}\vec{S}$, avec l'orientation positive, est minimale.

Solution. Les hypothèses du théorème de Gauss sont respectées, donc on a

$$\int_{\partial V} F \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} F \mathrm{d}V.$$

On utilise les coordonnées cylindriques. On fait le changement de variable

$$G(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}, \quad r \in [0,1],\ \theta \in [0, 2\pi],\ z \in [-h, 2h].$$

La jacobienne est

$$\det(\mathrm{Jac}_G) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} F \mathrm{d}V &= \iiint_V (3x^2 + 3y^2 - \tfrac{4}{h^2} z^3) \mathrm{d}V \\ &= \int_{-h}^{2h} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3r^2 - \tfrac{4}{h^2} z^3) r \,\mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}z \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \int_{-h}^{2h} \int_0^1 \big(3r^3 - \tfrac{4}{h^2} r z^3\big) \mathrm{d}r \mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_{-h}^{2h} \big(\tfrac{3}{4} - \tfrac{2}{h^2} z^3\big) \mathrm{d}z \\
&= 2\pi \big(\tfrac{9h}{4} - \tfrac{1}{2h^2}(16h^4 - h^4)\big) \\
&= 2\pi \big(\tfrac{9h}{4} - \tfrac{15h^2}{2}\big).
\end{aligned}
$$

On voit qu'il n'y a pas de minimum, puisque $\frac{9h}{4} - \frac{15h^2}{2} \to -\infty$ lorsque $h \to \infty$.

Exercice 38. Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un domaine et soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On définit le *laplacien* de f par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

On dit que f est *hamonique* lorsque $\Delta f = 0$ sur D.

a) Montrer que $\nabla \bullet (\nabla f) = \Delta f$.

b) On prend pour acquis que $\operatorname{div}(f\vec{v}) = \nabla f \bullet \vec{v} + f \operatorname{div}(\vec{v})$. Soit $\vec{g}\colon D \to \mathbb{R}$ un champ scalaire de classe C^2. Soit $V \subset D$ un volume tel que sa frontière est composée d'un nombre fini de surfaces de classe C^1. Montrer que

$$\int_{\partial V} f \cdot (\nabla g) \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V (\nabla f) \cdot (\nabla g)\, \mathrm{d}V + \iiint_V f \cdot \Delta g \, \mathrm{d}V.$$

(Ici, le point comme dans $f \cdot (\nabla g)$ désigne le produit de fonction.)

c) Montrer que si g est harmonique, alors

$$\int_{\partial V} f \cdot (\nabla g) \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V (\nabla f) \cdot (\nabla g)\, \mathrm{d}V.$$

Exercice 39. Intégration par parties. Soit $V \subseteq \mathbb{R}^3$ un volume tel que ∂V est nombre fini de surfaces régulières orientée positivement. Soit $\varphi\colon \overline{V} \to \mathbb{R}$ un champ scalaire de classe C^1 et $F\colon \overline{V} \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1. Montrer que

$$\int_V u \operatorname{div}(F) \mathrm{d}V = \int_{\partial V} uF \bullet \mathrm{d}\vec{S} - \int_V \nabla u \bullet F \mathrm{d}V.$$

Indice. Commencez par calculer $\operatorname{div}(uF)$.

Exercice 40. Soit V un volume de $\mathbb{R}^3$ tel que ∂V est formée d'un nombre fini de surfaces régulières. On pose $S = \partial V$, orientée positivement par rapport à V. Montrer les identités suivantes.

a) $\displaystyle\int_S a \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0$, où $a \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur constant.

b) $\displaystyle\int_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \mathrm{d}S = \iiint_V \Delta f \mathrm{d}V$, où $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est un champ scalaire de classe C^2. Ici, $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}$, est la dérivée directionnelle de f dans la direction de la normale à S et est donnée par $\nabla f \bullet \vec{n}$. Voir le numéro 38 pour Δ.

c) $\displaystyle\int_S (f\nabla g) \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V (f\Delta g + \nabla f \bullet \nabla g)\mathrm{d}V$, où f et g sont de champs scalaires de classe C^2.

d) $\displaystyle\int_S (f\nabla g - g\nabla f) \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V (f\Delta g - g\Delta f)\mathrm{d}V$, où f, g sont comme à la question précédente.

Solution. a) Puisque $\operatorname{div} a = 0$, par le théorème de Gauss, il suit que $\int_S a \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V 0\mathrm{d}V = 0$.

b) D'abord, on remarque que

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \mathrm{d}S = \int_S \nabla f \bullet \vec{n} \mathrm{d}S = \int_S \nabla f \bullet \mathrm{d}\vec{S}.$$

Ensuite, il suffit de voir que $\operatorname{div}(\nabla F) = \Delta f$ et d'appliquer le théorème de Gauss.

c) Calculons $\operatorname{div}(f\nabla g)$. On a $f\nabla g = (fg_{x_1}, fg_{x_2}, fg_{x_3})$. Avec la notation $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$, on trouve

$$\partial_j(fg_{x_j}) = f_{x_j}g_{x_j} + fg_{x_jx_j}.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\nabla g) &= f_{x_1}g_{x_1} + fg_{x_1x_1} + f_{x_2}g_{x_2} + fg_{x_2x_2} + f_{x_3}g_{x_3} + fg_{x_3x_3} \\
&= (f_{x_1}g_{x_1} + f_{x_2}g_{x_2} + f_{x_3}g_{x_3}) + (fg_{x_1x_1} + fg_{x_2x_2} + fg_{x_3x_3}) \\
&= \nabla f \bullet \nabla g + f\Delta g.
\end{aligned}$$

Par le théorème de Gauss, on a

$$\int_S (f\nabla g) \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \iiint \operatorname{div}(f\nabla g)\mathrm{d}V = \iiint (\nabla g \bullet \nabla g + f\Delta g)\mathrm{d}V.$$