Calcul 2

Analyse vectorielle

1. Théorème de Green

Exercice 1. Pour chaque région suivante, dessiner la région, indiquer le sens positif et dire si la région est simplement connexe.

a) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

b) $D = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$

c) $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

d) $D = \{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq 1\} \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

e) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \mid (x - 2)^2 + y^2 \leq 1\}$

Exercice 2. Calculer $\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\vec{s}$, où

a) γ est le cercle $x^2 + y^2 = 1$ paracourue dans le sens anti-horaire et $f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x^3} \\ y^2 \cos^2 y \end{pmatrix}$;

b) γ est la courbe polaire $r = \cos(\cos\theta)$ et $f(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix}$;

c) γ est la partie de parabole $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$, parcourue de gauche à droite et le segment de droite allant de $(-1, 1)$ à $(1, 1)$ et $f(x, y) = \begin{pmatrix} x \log|y + 2| \\ \frac{1}{2}\frac{x^2}{y+2} \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Calculer $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}A$, où $f(x, y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ avec

a) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$;

b) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ et $f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ xy \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes en utilisant le théorème de Green pour les transformer en intégrales curviligne.

a) $\displaystyle\iint_D \cos(y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où D est la région contenue dans le triangle de sommets $(0, 0)$, $(2, 1)$ et $(1, 1)$.

b) $\displaystyle\iint_D 2xe^{x^2+y^2}\mathrm{d}A$, où D est le disque unité $\overline{B}\big((0, 0), 1\big)$.

c) $\displaystyle\iint_D (-y \sin x + x \sin y)\mathrm{d}A$, où D est le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

Exercice 5. Calculer les intégrales curvilignes suivantes. (Refermez la région à l'aide d'une courbe bien choisie et utilisez le théorème de Green.)

a) $\displaystyle\int_\gamma \Big(2x\mathrm{d}x + (y^3e^{y^2} + x)\mathrm{d}y\Big)$, où γ est le demi-cercle $x^2 + y^2 =$, $y \geq 0$, orienté dans le sens anti-horaire.

b) $\displaystyle\int_C \Big((\cos x + xy^2)\mathrm{d}x + (\sin y^2 + x^2y)\mathrm{d}y\Big)$, où C est constituée des segment de $(1,0)$ à $(1,1)$ à $(0,1)$ à $(0,0)$.

c) $\displaystyle\int_C \Big(3y^2\mathrm{d}x + \log(y^4 + 1)\mathrm{d}x\Big)$, où C est la partie de parabole $y = -x^2 + 1$, $x \in [-1, 1]$.

Exercice 6. Calculer l'aire des régions suivantes.

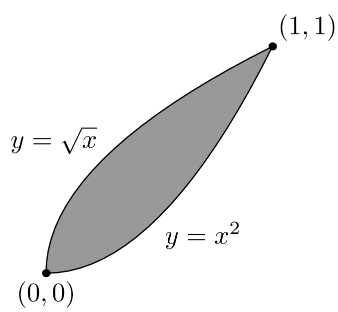
a) L'intérieur de l'ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b) L'intérieur de l'astroïde paramétrée par $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$.

c) La lunule donnée par l'intersection de $\overline{B}\big((0,0),1\big)$ et $\overline{B}\big((0,1),1\big)$.

d) La lunule donnée par $\overline{B}\big((0,0),1\big) \setminus B\left((-1,0), \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$.

Exercice 7. On veut calculer l'aire de la région R suivante



On rappelle que $\mathrm{Aire}(R) = \iint_R \mathrm{d}A = \int_{\partial R} x\mathrm{d}y = -\int_{\partial R} y\mathrm{d}x$. Considérer le raisonnement suivant :

> On paramétrise la frontière par les deux courbes par $\gamma_1(x) = \binom{x}{x^2}$, $x \in [0,1]$ et $\gamma_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{x} \end{pmatrix}$, $x \in [0,1]$.
>
> On utilise la formule $\mathrm{Aire}(R) = \iint_R \mathrm{d}A = -\int_{\gamma_1} y\mathrm{d}x + \int_{-\gamma_2} x\mathrm{d}y$. On intègre sur $-\gamma_2$ pour changer le sens de parcours. On trouve $-\int_{\gamma_1} y\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}$ et $\int_{-\gamma_2} x\mathrm{d}y = -\frac{1}{3}$ et donc $\mathrm{Aire}(R) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$.

Il est clair que $\mathrm{Aire}(R)$ ne peut pas être négatif, donc où est l'erreur ?

Exercice 8. Soit le champ de vecteur $F(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x^2} \\ x \end{pmatrix}$. On pose $a = \int_\gamma F \bullet \mathrm{d}\vec{s}$, où γ est le segment de droit allant de $(-1,-1)$ à $(1,-1)$.

a) Calculer $\int_C F \bullet \mathrm{d}\vec{s}$ en terme de a, où C est le segment de droite allant de $(-1,-1)$ à $(1,1)$.

b) Calculer $\int_{C_1} F \bullet \mathrm{d}\vec{s}$ en terme de a, où C_1 est l'arc de cercle centré à l'origine allant de $(-1,-1)$ vers $(1,1)$ et passant par le deuxième cadran.

Exercice 9. Soit le champ de vecteurs

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

a) Peut-on appliquer le théorème de Green pour calculer l'intégrale curviligne de f le long du cercle $x^2+y^2=1$ dans le sens anti-horaire ?

b) Peut-on le long du cercle $(x-2)^2+y^2=1$?

c) Calculer directement l'intégrale de la question a).

d) Utiliser le théorème de Green pour calculer l'intégrale curviligne de f le long de la courbe polaire
$$r(\theta) = 2 + \sin^2\theta + \cos\theta.$$
(Ne calculez pas l'intégrale curviligne directement!)

Exercice 10. Soit le champ de vecteur

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

a) Soit γ une courbe, une courbe fermée et simple qui ne passe pas par l'orgine, mais qui l'entour. Calculer $\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}s$.

b) Ce champ de vecteurs est-il conservatif ? Si oui, trouver un champ scalaire g tel que $\nabla g = f$. Sinon, justifier.

Exercice 11. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine simplement connexe dont la frontière ∂D est une courbe régulière. Utilisez le théorème de Green pour montrer que l'intégrale curviligne de toute courbe fermée d'un champ conservatif sur D est nulle (donc que le champ possède la propriété d'indépendance du chemin). Qu'est-ce qui ne fonctionne pas dans cette démarche si D n'est pas simplement connexe ?

Exercice 12. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine simplement connexe dont la frontière ∂D est une courbe régulière. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteur de la forme

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}.$$

Montrer que si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

alors f est conservatif. Qu'est-ce qui ne fonctionne pas dans la preuve si D n'est pas simplement connexe ?

Exercice 13. Soit l'EDO $p(x,y) + q(x,y)y' = 0$. Montrer que si p et q sont de classe C^1 sur un domaine simplement connexe D telle que ∂D est une courbe régulière et si p et q satisfont à la condition d'intégrabilité, alors l'EDO est exacte.[1]

Exercice 14. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine simplement connexe. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}^2$; $f \mapsto \binom{f_1}{f_2}$ un champ de vecteurs de classe C^2.

a) Sous quelles conditions les champs de vecteurs

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ -f_2 \end{pmatrix} \qquad\qquad G = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

sont-ils conservatifs ?

b) Si F et G sont conversatifs, alors f est-it conservatif ?

Exercice 15. Soit D un domaine. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs de classe C^1 de la forme

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}.$$

Soit $\vec{x} \in D$ un point. On pose $A := \mathrm{Jac}_{\vec{x}} f$. On dit que f *préserve les angles* au point $\vec{x}$ s'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que pour toute paire de courbes $\gamma_1, \gamma_2\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to D$ telle que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \vec{x}$, on ait

$$(A\gamma_1'(0)) \bullet (A\gamma_2'(0)) = \lambda \gamma_1'(0) \bullet \gamma_2'(0).$$

[1] On a énoncé au début du cours que ceci était vrai lorsque $D = \mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe, on montre ici une version plus générale de l'énoncé vu au début du cours.

a) Soit B une matrice 2×2. Supposons que B préserve les angles. On choisit γ_1 de sorte que $\gamma_1'(0) = \vec{e}_1$, un vecteur de la base canonique (donc $\vec{e}_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$). Supposons que $Be_1 = \alpha e_1$. Montrez qu'alors B est une dilatation, c'est-à-dire que

$$B = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où C est une constante que vous devez déterminer.

b) Montrer qu'il existe une rotation R telle que $R \circ A$ satisfait aux hypothèses du a). (On tient pour acquis que R préserve les angles et donc que $R \circ A$ préserve aussi les angles.)

c) La partie b) permet de conclure que

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

pour un certain θ et C fixé. Supposons que f préserve les angles pour tout $\vec{x} \in D$. Montrer que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

d) Une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 qui préserve les angles et qui est injective est appelée une *application conforme*. Montrer que si $f = \left(\begin{smallmatrix}P\\Q\end{smallmatrix}\right)$ est une application conforme et si D est simplement connexe, alors

$$\int_C (P\mathrm{d}x - Q\mathrm{d}y) = 0 \quad \text{et} \quad \int_C (P\mathrm{d}y + Q\mathrm{d}x) = 0$$

pour toute courbe fermée $C \subset D$ de classe C^1.

Exercice 16. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine et ∂D sa frontière formée d'un fini de courbes régulières. Soit $F = \left(\begin{smallmatrix}P\\Q\end{smallmatrix}\right)$ un champ de vecteurs de classe C^1. Montrer que

$$\int_{\partial D} F \bullet \mathrm{d}\vec{n} = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) \mathrm{d}A.$$

(Voir l'exercice 22 de la série sur les intégrales au besoin pour la notation $\mathrm{d}\vec{n}$.)

Exercice 17. Intégration par parties 1 (Première identité de Green). Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine tel que ∂D est formée d'un nombre fini de courbes régulières. Soit $\varphi, \psi\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ des champs scalaires tels que φ est de classe C^2 et ψ est de classe C^1. Montrer que

$$\iint_D \nabla\psi \bullet \nabla\varphi \mathrm{d}A = \int_{\partial D} \psi \nabla\varphi \bullet \mathrm{d}\vec{n} - \iint_D \psi \Delta\varphi \mathrm{d}A$$

où $\Delta\varphi = \nabla \bullet \nabla\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$.

Exercice 18. Intégration par partie 2 (Deuxième identité de Green). Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine tel que ∂D est formée d'un nombre fini de courbes régulières. Soit $\varphi, \psi \colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ des champs scalaires classe C^2. Montrer que

$$\int_{\partial D} \Big(\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi\Big) \bullet \mathrm{d}\vec{n} = \iint_D \Big(\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi\Big) \mathrm{d}A.$$

Remarque. On retrouve parfois la notation $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}$ pour signifier « la dérivée directionnelle dans la direction du vecteur normal », donc on a simplement $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} = \nabla \varphi \bullet \vec{n}$ (et c'est un champ scalaire). On pourrait donc réécrire les identités des exercices 17 et 18 avec cette notation. Par exemple, l'identité 2 deviendrait

$$\int_{\partial D} \Big(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}\Big) \mathrm{d}s = \iint_D \Big(\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi\Big) \mathrm{d}A.$$

2. Théorème de Stokes

Exercice 19. Dire si les domaines suivants de $\mathbb{R}^3$ sont simplement connexes.

a) $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$;

b) $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{d}\}$, où $\vec{d}$ est la droite $t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$;

c) La boule $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

Exercice 20. Soit C le cylindre $x^2 + y^2 = 1$, $z \in [0, 1]$, et C' la frontière du volume $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ z \in [0, 1]\}$.

a) Quelle est la différence entre C et C' ? Dessiner les deux surfaces.

b) Si $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs de classe C^1, que peut-on dire de $\int_{C'} \nabla \times F \bullet \mathrm{d}\vec{S}$? Peut-on dire la même chose de $\int_C \nabla \times F \bullet \mathrm{d}\vec{S}$? (Dans les deux intégrales, l'orientation est prise de sorte que $\vec{n} = (1, 0, 0)^T$ au point $\big(1, 0, \frac{1}{2}\big)^T$.)

Exercice 21. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{\partial C} \begin{pmatrix} y+\sin(x^2) \\ z+2^{\sin y} \\ -x+3z \end{pmatrix} \bullet \mathrm{d}\vec{s}$, où C est le cône $z^2 = x^2+y^2$, $0 \leq z \leq 1$, et ∂C est le bord du cône, orientée de l'axe des x vers l'axe des y.

b) $\displaystyle\int_{\partial C} \begin{pmatrix} xy \\ \sin(y) \\ yz \end{pmatrix} \bullet \mathrm{d}\vec{s}$, où C est le cylindre $x^2+y^2=1$, $0 \leq z \leq 1$ et ∂C est le bord du cylindre, orientée de sorte que les deux cercles vont de l'axe des x vers l'axe des y.

c) $\displaystyle\int_{\partial S} \begin{pmatrix} (x-1)x^3 \\ x^2-z^2 \\ z^2e^z \end{pmatrix} \bullet \mathrm{d}\vec{s}$, où S est la surface de révolution obtenue par la rotation de la courbe $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ dans le plan xy autour de l'axe des y et ∂S est le bord de S orientée de sorte le cercle va de l'axe des z vers l'axe des x.

Exercice 22. Soit S l'hémisphère nord $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$, orienté de sorte que $\vec{n} = (0,0,1)^T$ au point $(0,0,1)^T$. Calculer l'intégrale $\int_S \nabla \times F \bullet \mathrm{d}\vec{S}$, où

a) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{x^2} \\ \sin(y^3) \\ \sqrt{z^2+1} \end{pmatrix}$

b) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2e^{x^3+y^2} \\ \sin(x^2y^5z^3) \\ x+y \end{pmatrix}$

Exercice 23. Calculer les intégrales de flux suivantes en changeant de surface.

a) $\displaystyle\int_S \mathrm{rot}(F) \bullet \mathrm{d}\vec{S}$, où $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2e^z \\ e^{y^2}+z^2 \\ xz \end{pmatrix}$ et S est l'hémisphère nord $x^2+y^2+z^2=1$, $0 \leq z \leq 1$, orientée de sorte que $\vec{n} = (0,0,1)^T$ au point $(0,0,1)^T$.

b) $\displaystyle\int_C \mathrm{rot}(F) \bullet \mathrm{d}\vec{S}$, où $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2(y-1)^3 \\ \sin(y^2) \\ yz+x(y-1) \end{pmatrix}$ et C est le cylindre $x^2+z^2=1$, $0 \leq y \leq 1$, orientée de sorte que $\vec{n} = (0,0,1)^T$ au point $(0,\frac{1}{2},1)$.

Exercice 24. Soit le champ de vecteurs

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

Soit S l'hémisphère nord, duquel est retiré le pôle nord

$$S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0, z \neq 1\},$$

orienté avec les vecteurs normaux pointant vers l'extérieur.

a) Calculer $\int_{\partial S} \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r}$.

b) Calculer $\int_S \nabla \times \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$.

c) Ceci contredit-il le théorème de Stokes ?

Exercice 25. Soit C le cylindre

$$C = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1,\ z \in [0,a]\},$$

orienté avec les vecteurs normaux pointant vers l'exterieur. En utilisant le théorème de Stokes, calculer $\int_{\partial C} \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r}$ pour toutes les valeurs de $a > 0$, où $\vec{v}$ est le champ de vecteur $(*)$ du numéro 24. Pourquoi le théorème de Stokes s'applique-t-il dans ce cas ?

Exercice 26. Soit le champ de vecteurs

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit C_r le cercle de rayon r dans le plan xy : $x^2+y^2 = r^2$, $z = 0$.

a) Calculer $\nabla \times \vec{F}$.

c) Calculer

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{s}.$$

d) Calculer $\nabla \times \vec{F} \bullet \vec{n}$, où $\vec{n}$ est le vecteur normal unitaire de C_r pointant dans la direction de l'axe des z.

Exercice 27. Soit C le cercle $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$, orienté dans le sens allant de l'axe des x vers l'axe des y. Soit le champ de vecteurs

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ xz \\ e^{z^2} z \end{pmatrix}.$$

Calculer $\int_C \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{s}$.

Exercice 28. Quel le flux de $\nabla \times \vec{F}$, pour n'importe quel champ de vecteurs $\vec{F}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$, à travers un ellipsoïde ?

Exercice 29. Soit P la partie de paraboloïde $x^2 + z^2 = y$, $y \in [0, 1]$. On prend l'orientation qui pointe vers l'extérieur de P. Soit le champ de vecteurs

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2z + x^2 \cos(y) \\ e^{z^2} \\ \sin z + x^2 \end{pmatrix}.$$

Calculer le flux de $\nabla \times \vec{v}$ à travers P.

Exercice 30. Soit le C cercle $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, orienté dans le sens allant de l'axe des z vers l'axe des x. Soit le champ de vecteurs

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y - 1 \\ (y-1)e^{y^3 - y^2} + ye^{(y-1)^2} \\ z(y-1) \end{pmatrix}.$$

Calculer $\int_C \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{s}$. (Consultez l'exemple 2.4.13 des notes au besoin.)

Exercice 31. Soit le champ de vecteurs

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz^2 + 1 \\ e^{y^2} \\ x^2 z \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que $\vec{F}$ est conservatif.

b) Calculer $\int_C \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{s}$, où C est le demi-cercle $x^2 + y^2 = 1$, $y \leq 0$, $z = 0$, orienté dans le sens allant de $(-1, 0)$ à $(1, 0)$.

3. Théorème de Gauss

Exercice 32. Calculer $\displaystyle\int_S F \bullet \mathrm{d}\vec{S}$, où

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ y \\ xz \end{pmatrix}$$

et S est la frontière du tétraèdre borné par les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $x + y + z = 1$.

Exercice 33. Calculer le flux du champ de vecteurs

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -e^{x^2} \\ 2yxe^{x^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

à travers la demi-sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$, orientée avec les vecteurs normaux vers l'extérieur (c'est-à-dire $\vec{N}$ est parallèle à l'axe des y positif en $(0, 1, 0)$).

Exercice 34. Soit S la partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ qui se trouve entre les plans $y = 1$ et $y = -1$, orientée avec la normal vers l'extérieur. Calculer le flux du champ de vecteurs

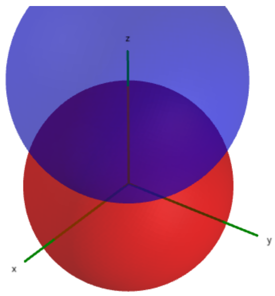
$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y\cos(z^2) \\ x \\ e^{-y^2} \end{pmatrix}$$

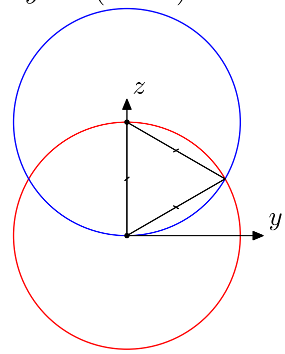
au travers S. (Précision : les plans ne font pas partie de S.)

Exercice 35. À l'aide du théorème de Gauss, calculer $\displaystyle\int_S F \bullet \mathrm{d}\vec{S}$, où S est l'hémisphère nord de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orientée vers le haut, et

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 x \\ \frac{1}{3}y^3 + \tan z \\ x^2 z + y^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 36. En utilisant le théorème de Gauss, calculer le volume contenu simultanément dans les deux spheres S_1 : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et S_2 :$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.





Indice. Avec les coordonnées sphériques longitude-lattitude, utiliser l'image ci-haut à droite de l'intersection des sphères avec le plan $x = 0$ pour déterminer l'intervalle de la latitude des paramétrages.

Exercice 37. Soit $h > 0$. Soit le volume et le champ de vecteurs

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq h^2,\ z \in [-h, 2h]\}, \qquad F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^3 - y^2 \\ y^3 - z^2 \\ \frac{1}{h^2}(x^2 - z^4) \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si possible, la valeur de h pour laquelle $\displaystyle\int_{\partial V} F \bullet \mathrm{d}\vec{S}$, avec l'orientation positive, est minimale.

Exercice 38. Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un domaine et soit $f \colon D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On définit le *laplacien* de f par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

On dit que f est *hamonique* lorsque $\Delta f = 0$ sur D.

a) Montrer que $\nabla \bullet (\nabla f) = \Delta f$.

b) On prend pour acquis que $\operatorname{div}(f\vec{v}) = \nabla f \bullet \vec{v} + f \operatorname{div}(\vec{v})$. Soit $\vec{g} \colon D \to \mathbb{R}$ un champ scalaire de classe C^2. Soit $V \subset D$ un volume tel que sa frontière est composée d'un nombre fini de surfaces de classe C^1. Montrer que

$$\int_{\partial V} f \cdot (\nabla g) \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V (\nabla f) \cdot (\nabla g) \,\mathrm{d}V + \iiint_V f \cdot \Delta g \,\mathrm{d}V.$$

(Ici, le point comme dans $f \cdot (\nabla g)$ désigne le produit de fonction.)

c) Montrer que si g est harmonique, alors

$$\int_{\partial V} f \cdot (\nabla g) \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V (\nabla f) \cdot (\nabla g) \,\mathrm{d}V.$$

Exercice 39. Intégration par parties. Soit $V \subseteq \mathbb{R}^3$ un volume tel que ∂V est nombre fini de surfaces régulières orientée positivement. Soit $\varphi\colon \overline{V} \to \mathbb{R}$ un champ scalaire de classe C^1 et $F\colon \overline{V} \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1. Montrer que

$$\int_V u \operatorname{div}(F) \mathrm{d}V = \int_{\partial V} uF \bullet \mathrm{d}\vec{S} - \int_V \nabla u \bullet F \mathrm{d}V.$$

Indice. Commencez par calculer $\operatorname{div}(uF)$.

Exercice 40. Soit V un volume de $\mathbb{R}^3$ tel que ∂V est formée d'un nombre fini de surfaces régulières. On pose $S = \partial V$, orientée positivement par rapport à V. Montrer les identités suivantes.

a) $\displaystyle\int_S a \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0$, où $a \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur constant.

b) $\displaystyle\int_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \mathrm{d}S = \iiint_V \Delta f \mathrm{d}V$, où $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est un champ scalaire de classe C^2. Ici, $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}$, est la dérivée directionnelle de f dans la direction de la normale à S et est donnée par $\nabla f \bullet \vec{n}$. Voir le numéro 38 pour Δ.

c) $\displaystyle\int_S (f\nabla g) \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V (f\Delta g + \nabla f \bullet \nabla g) \mathrm{d}V$, où f et g sont de champs scalaires de classe C^2.

d) $\displaystyle\int_S (f\nabla g - g\nabla f) \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V (f\Delta g - g\Delta f) \mathrm{d}V$, où f, g sont comme à la question précédente.