Calcul II

Examen intra

Vendredi le 1er novembre 2019

L'examen dure 110 minutes.

/75

Aide mémoire

Les matrices de rotations

$$R_x = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_y = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad R_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

autours des axes x, y et z respectivement.

Identités trigonométriques

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \tan^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Identité hyperbolique : $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Coordonnées polaires et sphériques

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\cos\phi \\ z = r\sin\phi \end{cases}, \quad r \geq 0, (\theta,\phi) \in [0,2\pi] \times \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

Longueur et aire

$$L(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t \qquad \mathrm{Aire}(\Sigma) = \int_S \mathrm{d}S = \iint_D \|\vec{N}(u,v)\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Méthode de Lagrange

$$u_1'(x) = \frac{-y_2 r(x)}{y_1y_2' - y_2y_1'}, \qquad u_2'(x) = \frac{y_1 r(x)}{y_1y_2' - y_2y_1'}$$

1. *15 pts. Vrai ou faux.* **Justifiez** vos réponses.

a) Si $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ est une courbe de classe C^1, alors

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq L(\gamma).$$

b) Si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2, alors

$$\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}.$$

c) L'EDO $y + 1 + (1 - x)y' = 0$ est exacte.

2. *5pts. Choix multiples.* Choisissez le premier énoncé vrai. Ne justifiez pas.
(Bonne réponse 5pts; autre réponse vraie 3pts; aucune réponse 0pt; réponse fausse -3pts)
Soit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^1. Soit R une matrice de rotation et soit $R \circ \gamma$ la courbe obtenue de la rotation de γ.

a) γ et $R \circ \gamma$ ont la même trajectoire;
b) γ et $R \circ \gamma$ ont les mêmes vecteurs tangents;
c) γ et $R \circ \gamma$ ont la même longueur;
d) γ est régulière si et seulement si $R \circ \gamma$ est régulière.

3. *15 pts.* Résoudre les EDO suivantes.

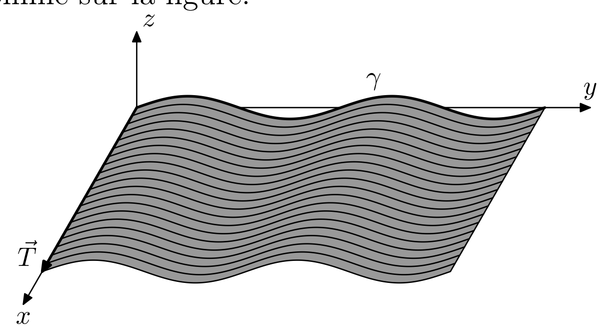
a) $y'' - 2y' = 5\cos x$

b) $\dfrac{y'}{y + 3x} = \dfrac{1}{x}$

4. *20 pts*. Soit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^1 contenue dans le plan yz, c'est-à-dire

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix}.$$

On considère la surface $\Sigma\colon [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{R}^3$ obtenue par la réunion des translations de γ par $s\vec{T}$, où $s \in [0,1]$, comme sur la figure.



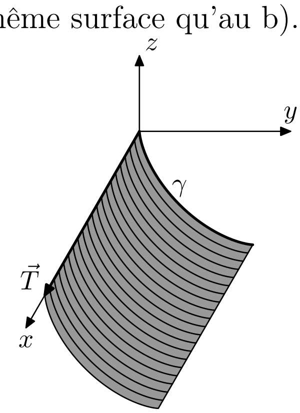
a) (8 pts) Trouver un paramétrage de Σ par rapport à (s,t).

b) (6 pts) Calculer l'aire de Σ lorsque γ est un arc d'astroïde comme sur la figure ci-bas, c'est-à-dire où Σ est

$$\Sigma(s,t) = \begin{pmatrix} s \\ \cos^3(t) \\ \sin^3(t) - 1 \end{pmatrix},$$

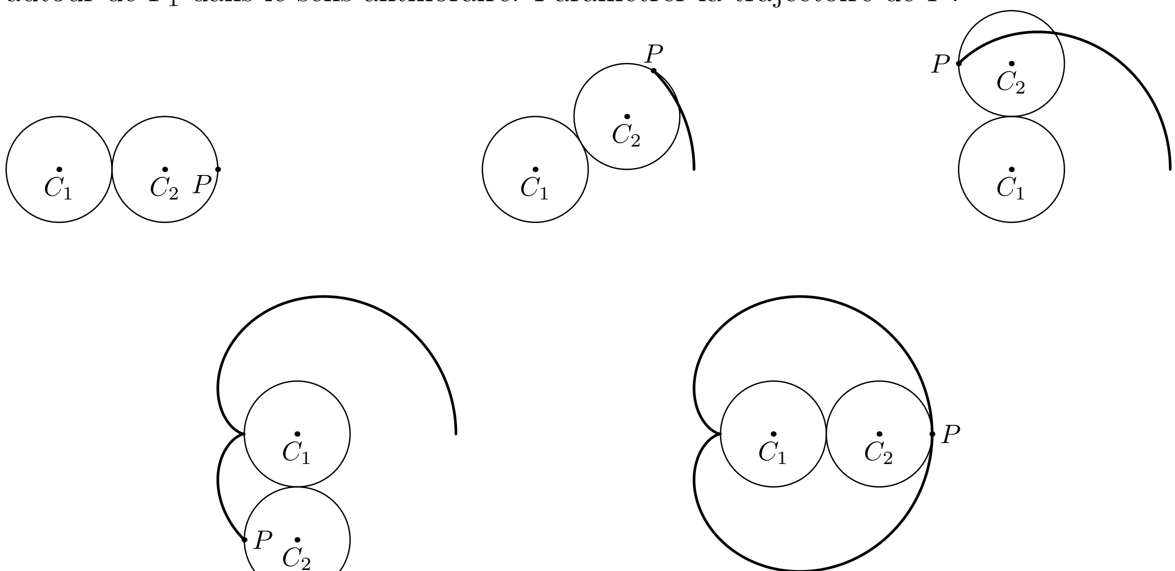
pour $(s,t) \in [0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. (Ici, $\vec{T} = (1,0,0)^T$.)

c) (6 pts) Donner le paramétrage du plan tangent à Σ au point $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4} - 1\right)^T$ et qui passe par P, où Σ est la même surface qu'au b).



Répondez à l'une des deux questions suivantes. Si vous répondez aux deux questions, indiquez clairement laquelle corriger, sinon la première sera corrigée.

5. *20 pts*. On considère deux cercles Γ_1 et Γ_2 de rayon 1. Le premier est centré à l'origine et le second, en $(2,0)$. Soit P le point le $(3,0)$ sur Γ_2. On laisse Γ_1 fixé, tandis que Γ_2 roule autour de Γ_1 dans le sens antihoraire. Paramétrer la trajectoire de P.



6. *20 pts*. Soit l'EDO

$$y'' + \frac{(y')^2}{x} = 0. \qquad (*)$$

a) (7pts) Réduire à une EDO d'ordre 1 et résoudre la nouvelle équation.

b) (8pts) On définit Li comme étant la solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \frac{(y')^2}{x} = 0, \\ y(2) = 0, \\ y'(e) = 1. \end{cases}$$

Trouver une expression pour Li de la forme

$$\mathrm{Li}(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire trouver a et f.

c) (5pts) On prend pour acquis que $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Li}(x) = +\infty$. En utilisant la règle de de l'Hôpital, montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{Li}(x)}{x/(\log x)} = 1.$$