Calcul II

MAT 1410

Examen Final

Mardi le 10 décembre 2019

L'examen dure 170 minutes.

$$/90$$

Aide mémoire

Les matrices de rotations

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad R_y = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad R_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

autours des axes x, y et z respectivement.

Identités trigonométriques

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \tan^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Identité hyperbolique : $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Coordonnées sphériques et cylindriques de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi, & \theta \in [0, 2\pi] \\ y = r\sin\theta\cos\varphi, & \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ z = r\sin\varphi, & r \in [0, \infty) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta, & \theta \in [0, 2\pi] \\ y = r\sin\theta, & r \in [0, \infty) \\ z = z, & z \in [0, \infty) \end{cases}$$

Longueur et aire

$$L(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t \qquad \mathrm{Aire}(\Sigma) = \int_S \mathrm{d}S = \iint_D \|\vec{N}(u,v)\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Intégrale de courbe et de surface

$$\int_\gamma f\mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t \qquad \int_S f\mathrm{d}S = \iint_D f(\Sigma(u,v))\|\vec{N}(u,v)\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Intégrale curviligne et intégrale de flux

$$\int_C \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_a^b \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) \bullet \vec{r}'(t)\mathrm{d}t \qquad\qquad \int_S \vec{G} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D \vec{G}\big(\vec{\Sigma}(u,v)\big) \bullet \vec{N}(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Théorème de Green, de Stokes et de Gauss

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}A = \int_C \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_C (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y)$$

$$\int_S \nabla \times \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{s}$$

$$\iiint_V \mathrm{div}\vec{F}\mathrm{d}V = \int_{\partial V} \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

Définitions

- Un champ de vecteurs $\vec{F}$ est *conservatif* s'il existe un champ scalaire f tel que $\vec{F} = \nabla f$.
- Une surface fermée est *orientée positivement* si le choix de vecteurs normaux pointent vers l'extérieur.

1. *15 pts. Vrai ou faux.* **Justifiez** vos réponses.

a) Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un domaine et soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ un champ scalaire. On dit que f est *harmonique* si

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

sur D. Si f est hamornique, alors

$$\int_{\partial V} \nabla f \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0,$$

où $V \subset D$ est un volume qui satisfait aux conditions du théorème de flux-divergence.

b) Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ un volume borné dont la frontière est un nombre fini de surfaces de classe C^1 et soit $\vec{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. Alors

$$\int_{\partial V} \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

donne le volume de V, lorsque

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^z \\ x^2 + \cos(xz) \\ z + 10 \end{pmatrix}.$$

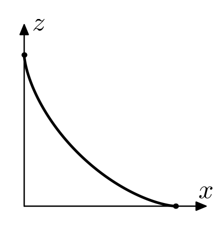
c) On rappelle qu'une EDO $p(x,y) + q(x,y)y' = 0$ est *exacte* s'il existe une fonction φ telle que

$$p(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y) \qquad q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y).$$

Si le champ de vecteurs $\vec{F} = \left(\begin{smallmatrix} p(x,y) \\ q(x,y) \end{smallmatrix}\right)$ est conservatif, alors l'EDO $p(x,y) + q(x,y)y' = 0$ est exacte.

2. *10 pts.* Questions courtes.

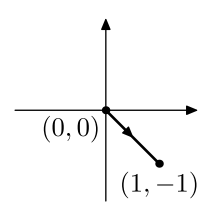
a) Paramétrer la surface de révolution obtenue par la rotation de la courbe γ autour de l'axe des z, où γ est l'arc d'astroïde donnée par



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ 0 \\ \sin^3 t \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

Indices. Utilisez les matrices de rotation sur l'aide mémoire.

b) Calculer l'intégrale de courbe $\int_C ye^{x^2}\,\mathrm{d}s$, où C est le segment de droite reliant $(0,0)$ à $(1,-1)$.



3. *15 pts*. Soit C le cylindre défini par

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + z^2 = 1, y \in [0, 1]\},$$

orienté avec les vecteurs normaux qui pointent vers l'extérieur. Soit le champ de vecteurs

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \cos z \\ z \\ \sin(xy) \end{pmatrix}.$$

Calculer le flux de $\vec{F}$ au travers C.
Attention! Le cylindre n'est pas fermé aux extrémités!

4. *20 pts*. Soit le champ de vecteurs

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} ye^{z^2} \\ z + \cos(x^2) \\ y^2 + \sin^2 x \end{pmatrix}.$$

Soit P la partie de paraboloïde d'équation $x = y^2 + z^2$ avec $x \in [0, 1]$ orienté avec le vecteur normal qui pointe vers l'extérieur. Calculer $\int_{\partial P} \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{s}$, où ∂P a une orientation compatible avec celle de P.

5. *20 pts*. Soit le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

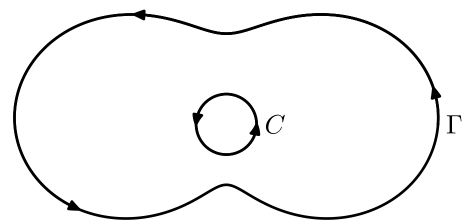
a) (3 pts) Montrer que $\vec{v}$ satisfait à la condition d'intégrabilité, c'est-à-dire

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

b) (5 pts) Soit C le cercle unité $x^2+y^2=1$ orienté dans le sens allant de l'axe des x vers l'axe des y. Calculer $\int_C \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{s}$.

c) (8 pts) Soit Γ la courbe paramétrée par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} (5+3\cos^2\theta+\sin\theta)\cos\theta \\ (5+3\cos^2\theta+\sin\theta)\sin\theta \end{pmatrix}.$$



Calculer $\int_\Gamma \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{s}$.

Indice. N'essayez pas de calculer l'intégrale curviligne directement.

d) (4 pts) Le champ de vecteurs $\vec{v}$ est-il conservatif? Justifiez.

6. *7 pts*. Bonus.

1. (4 pts) *Vrai ou faux*. **Justifiez.** Si $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ est une courbe de classe C^1, alors

$$\|\gamma(b)-\gamma(a)\| \leq L(\gamma),$$

   où $L(\gamma)$ est la longueur de γ.

2. (3 pts) *Choix multiple*. Choisissez l'énoncé vrai. Ne justifiez pas. Répondrez dans votre cahier d'examen.

   Soit le champ de vecteurs

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

   a) $\vec{v}$ est conservatif;
   b) $\vec{v}$ possède la propriété d'indépendance du chemin;
   c) l'intégrale curviligne de $\vec{v}$ sur le cercle $x^2+y^2=1$ orienté dans le sens antihoraire vaut 2π;
   d) $f(x,y) = x^2+y^2+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ est un potentiel de $\vec{v}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.