Équations différentielles

Série 9 (solutionnaire partiel)

Exercice 1. Trouver les points singuliers du système non linéaire autonome $(x', y')^T = f(x, y)$, où f est la fonction :

a) $f(x,y) := \begin{pmatrix} x^2y \\ (x-1)(y+1) \end{pmatrix}$ b) $f(x,y) := \begin{pmatrix} \sin y \\ x \end{pmatrix}$

c) $f(x,y) := \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$

Solution. On cherche les solutions de $f(x, y) = (0, 0)$.

a) On a

$$\begin{cases} x^2y = 0, \\ (x-1)(y+1) = 0. \end{cases}$$

La première équation donne $x = 0$ ou $y = 0$. La deuxième équation donne $x = 1$ ou $y = -1$. Ainsi, il y a deux points singuliers : $(0, -1)$ et $(1, 0)$.

b) On a

$$\begin{cases} \sin y = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Ainsi, les points singuliers sont $(0, \pi n)$, où $n \in \mathbb{Z}$.

c) Il n'y a aucun point singulier, puisqu'il faudrait que $\cos y = 0$ et $\sin y = 0$ en même, ce qui est impossible.

Exercice 2. Calculer le linéarisé de tous les points singuliers du système $(x', y')^T = f(x, y)$, où f est la fonction :

a) $f(x,y) := \begin{pmatrix} x^2 - y^2 - 1 \\ \frac{y}{x} \end{pmatrix}$ b) $f(x,y) := \begin{pmatrix} y + x(1-x^2-y^2) \\ -x + y(1-x^2-y^2) \end{pmatrix}$

c) $f(x,y) := \begin{pmatrix} y \\ \sin x \end{pmatrix}$

Solution. a) On trouve d'abord les points singuliers. On a

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0, \\ \frac{y}{x} = 0. \end{cases}$$

La deuxième équation donne $y = 0$ et donc la première donne $x = \pm 1$. On pose $A = f'(1, 0)$ et $B = f'(-1, 0)$. On obtient

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les linéarisés sont donc $Y' = AY$ et $Y' = BY$.

b) Pour les points singuliers, on a

$$\begin{cases} y + x(1 - x^2 - y^2) = 0, \\ -x + y(1 - x^2 - y^2) = 0. \end{cases}$$

De la deuxième équation, on a $x = y(1 - x^2 - y^)$. En remplaçant dans la première, on obtient $y + y(1 - x^2 - y^2)^2 = y\big(1 + (1 - x^2 - y^2)^2\big) = 0$. On doit avoir $y = 0$. Dans la seconde équation, on trouve $x = 0$. Ainsi, $(0, 0)$ est le seul point singulier.

Le linéarisé est $Y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. C'est un centre.

Exercice 3. À partir des portraits de phases des linéarisés, tracer différentes possibilités pour le portrait de phases des systèmes du numéro précédent. (Note : on ne demande pas de démontrer que le portrait de phases est véritablement l'une de ces possibilités.)

Solution. b) Le linéarisé est un centre. Différentes possibilités pour le portrait de phases incluent un centre, un foyer fable stable ou un foyer faible instable. Mais en vérité, le portrait de phases comporte un cycle de limite, donc on ne peut pas deviner le bon portrait de phases seulement à l'aide du linéarisé.

Exercice 4. Calculer $(g_* f)\big(g(x, y)\big)$, où $f(x, y) = (x, x + y)^T$ et g est la fonction :

a) $g(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$ b) $g(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 + xy \\ y - x \end{pmatrix}$

Solution. a) D'abord, on calcule

$$g'(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & -2y \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on a

$$(g_* f)\big(g(x, y)\big) = g'(x, y) f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & -2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4xy + 2x^2 \\ 2x^2 - 2xy - 2y^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Pour $x, y > 0$, on pose $(r, \theta)^T = g(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix}$.

a) Calculer $dg(x, y)$.

b) Calculer $(x, y)^T = g^{-1}(r, \theta)$.

c) Exprimer les systèmes suivants en coordonnées polaires à l'aide de g.

$i)$ $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$ $\qquad ii)$ $\begin{cases} x' = x^3 - 3xy^2 \\ y' = -y^3 + 3x^2 y \end{cases}$

$iii)$ $\begin{cases} x' = y + x(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2) \\ y' = -x + y(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2) \end{cases}$ $\qquad iv)$ $\begin{cases} x' = y + x\big(1 - \frac{y}{x}\big) \\ y' = -x + y\big(1 - \frac{y}{x}\big) \end{cases}$

Solution. a) On a

$$\mathrm{d}g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

b) On a $\binom{x}{y} = \binom{r\cos\theta}{r\sin\theta}$. En effet, cela découle du fait que $r^2 = x^2 + y^2$ et que $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

c) $i)$ On calcule $v \circ g(x,y) = (g_* f)\big((x,y)\big)$. On a

$$v \circ g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^3 - xy^2 + 2xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-x^2y + y^3 + 2x^2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y(y^2+x^2)}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Maintenant, on remplace x par $r\cos\theta$ et y par $r\sin\theta$. On obtient

$$v(r,\theta) = \begin{pmatrix} r^2\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

On conclut que le système en coordonnées polaire est

$$\begin{cases} r' = r^2\cos\theta, \\ \theta' = r\sin\theta. \end{cases}$$

$ii)$ La réponse est

$$\begin{cases} r' = r^3(\cos^2\theta - \sin^2\theta), \\ \theta' = 2r^2\cos\theta\sin\theta. \end{cases}$$

$iii)$ On obtient

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2)(4 - r^2), \\ \theta' = -1. \end{cases}$$

$iv)$ La réponse est

$$\begin{cases} r' = r(1 - \tan\theta), \\ \theta' = -1. \end{cases}$$

Exercice 6. Pour chaque système du 5c), i) à iii), déterminer lesquelles possèdent un cycle limite. Tracer les portraits de phases.

Solution. i) On a

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{r\sin\theta}{r^2\cos\theta} = \frac{\tan\theta}{r}.$$

Par séparation de variables, on trouve $\log|\sin\theta| = \log|r| + C$ et donc $r = D\sin\theta$. Ensuite, on remplace r dans l'équation de θ'. Cela donne

$$\theta' = D\sin^2\theta \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \operatorname{arccotan}(-Dt + E).$$

Ainsi, lorsque $t \to \infty$, on a que $\theta \to \pi$. Puisque pour $\theta = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, on a $r = 0$, les orbites s'approchent de l'origine dans le plan xy lorsque $t \to \infty$, qui est un point singulier. Ainsi, les orbites ne peuvent pas être périodiques.

ii) On procède comme au a) et on arrive à

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}r(\mathrm{cotan}\theta - \tan\theta).$$

Par séparation de variables, on obtient $\log r^2 = \log|\sin\theta| + \log|\cos\theta| + C$ et donc $r^2 = D|\sin\theta||\cos\theta|$. Comme précédement, les orbites « passe » par le point singulier $(0,0)$, donc elles ne sont pas périodiques. Il n'y a pas de cycle limite.

iii) Ce système possède deux cycles limites. En effet, $r = 1$ $r = 4$ sont deux solutions constantes de l'EDO. Elles représentent des cercles dans le plan xy.

Exercice 7. Pour chaque système, déterminer si l'origine est un centre ou un foyer faible.

a) $\begin{cases} x' = -y + x^2y \\ y' = x + xy^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = -y + xy \\ y' = x \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = -y + x\log(1 + x^2 + y^2) \\ y' = x + y\log(1 + x^2 + y^2) \end{cases}$

Suggestion. Dans chaque cas, essayez de passer aux coordonnées polaires ou de trouver une intégrale première.

Solution. a) Si on transforme en coordonnées polaires, on trouve

$$\begin{cases} r' = r^3\cos\theta\sin\theta, \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

On peut résoudre ce système. Pour θ, on a simplement $\theta(t) = t + C$. Pour r, on a

$$\frac{1}{-2r^2} = \int \cos(t+C)\sin(t+C)\mathrm{d}t = \sin^2(t+C) + D.$$

On a donc

$$r = \frac{\pm 1}{\sqrt{-2\sin^2(t+C) - 2D}}.$$

Si l'orbite dans le plan xy passe par le point (x_0, y_0) au temps $t = 0$, alors on obtient les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$, l'angle du point (x_0, y_0) avec l'axe des x positifs, et $r(0) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} =: r_0$. Ainsi, on a $C = \theta_0$ et

$$D = \frac{-1}{2r_0^2} - \sin^2(t + \theta_0).$$

Si (x_0, y_0) est suffisamment près de $(0,0)$, alors $-2D$ est grand et donc r est bien définie pour tout t. Dans ce cas, on voit que r est périodique, donc les orbites près de $(0,0)$ sont périodique. C'est un centre.

b) On peut trouver une intégrale première comme suit. On résout

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{-y + xy} = \frac{x}{y(x-1)}.$$

On obtient

$$\frac{y^2}{2} = \int y\mathrm{d}y = \int \frac{x}{x-1}\mathrm{d}x = \int \frac{x-1+1}{x-1}\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = x + \log|x-1| + C$$

On pose $h(x,y) = x + \log|x-1| - \frac{y^2}{2}$ notre intégrale première. En $(0,0)$, le gradient vaut $\nabla h(0,0) = (0,0)$. La matrice hessienne est

$$\mathrm{Hes}(h)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{(x-1)^2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On voit que cette matrice à toujours deux valeurs propres négatives, donc $(0,0)$ est un maximum local. On conclut que $(0,0)$ est un centre.

c) On passe aux coordonnées polaires. On obtient le système

$$\begin{cases} r' = r\log(1 + r^2), \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

On voit que pour tout $r > 0$, on a $r' > 0$, donc r est une fonction strictement croissante. Ainsi, l'origine est un foyer faible instable.