Équations différentielles

Série 8 (solutionnaire partiel)

Exercice 1. Déterminer la nature des points singuliers des systèmes d'EDO suivants, s'il y a lieu.

a) $Y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y$ b) $Y' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$ c) $Y' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} Y$

d) $Y' = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} Y$ e) $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} Y$ f) $Y' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} Y$

Solution. Comme les systèmes sont linéaires, la nature des points singuliers est déterminée par les valeurs propres.

a) Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1 + i$ et $\lambda = 1 - i$. Ainsi, c'est un foyer instable.

b) Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 0$. Puisque l'une des valeurs propres est nulle, il n'y a pas de point singulier à l'origine. (Cela est nécessairement vrai pour les systèmes linéaires, mais pour les systèmes non linéaires, le point peut être une solution isolée de $Y' = 0$ ou non.)

c) Les valeurs propres sont $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{41})$. Puisque $\sqrt{41} > \sqrt{36} = 6$, il a une valeur propre positive et une valeur propre négative. On conclut que c'est un col.

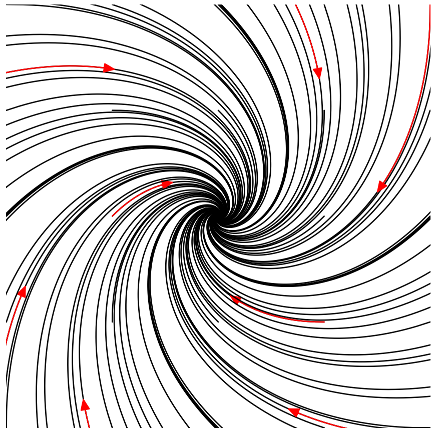
d) Foyer stable e) Col f) Col.

Exercice 2. Pour chacun des systèmes linéaires suivants, tracer le portrait de phases près de l'origine. Dire de qu'elle type de point fixe il s'agit, s'il y a lieu (col, nœud stable, instable, etc.).

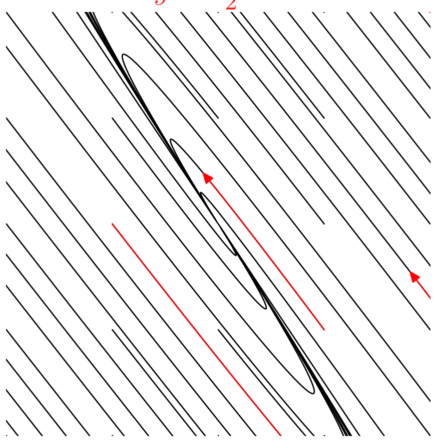
a) $Y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y$ b) $Y' = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} Y$

c) $Y' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} Y$ d) $Y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} Y$

Solution. a) Les valeurs propres sont $1 \pm i$, donc c'est un foyer instable.



b) Il y a une valeur propre double $\lambda = -1$ et un seul vecteur propre $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ainsi, le portrait de phases est formé de la droite $y = \frac{-3}{2}x$ et de courbes qui sont attirées vers $(0, 0)$.



Exercice 3. Calculer le flot des EDO du numéro précédent.

Solution. b) Il faut calculer la solution. On sait qu'il y a une valeur propre double $\lambda = -1$ et un seul vecteur propre $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On trouve un deuxième vecteur pour compléter la base. Pour simplifier la réponse, on cherche w tel que $(A + I)w = v$. On peut prendre $w = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$. La solution est donc

$$Y(t) = C_1 e^{-t} v + C_2 (x e^{-t} v + e^{-t} w).$$

Pour trouver le flot Φ, on calcule la solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = AY, \\ Y_1(0) = x, \\ Y_2(0) = y. \end{cases}$$

La solution est $\Phi(t, x, y) = \frac{y}{3} e^{-t} v + (3x + 2y)(x e^{-t} v + e^{-t} w)$.

Exercice 4. Pour chaque EDO, dire si elle est autonome ou non. Si elle n'est pas autonome, la transformer en un système équivalent qui est autonome. Indiquer quel est l'espace de phases pour chacune.

a) $y'' = y^2 + x^2$

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t-1 \\ \log t \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv \\ \frac{v}{w} \\ \frac{w-1}{1+u^2+v^2} \end{pmatrix}$

Solution. a) Non autonome. On peut transformer le système en

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = y^2 + x^2, \\ x' = 1. \end{cases}$$

L'espace de phases est $\mathbb{R}^3$.

b) Non autonome. Après avoir transformé le système, l'espace de phase est $\{(x, y, t) \mid t > 0\}$.

c) Automne. L'espace de phase est $\mathbb{R}^3 \setminus \{w \neq 0\}$.

Exercice 5. Un poids attaché à un ressort se meut dans un liquide visqueux. La résistance du liquide est directement proportionnelle à la vitesse du poids. Ainsi, l'EDO $x'' = ax' + bx$ modélise ce système, où $a, b < 0$ et où $x = 0$ est la position d'équilibre du ressort.

a) Déterminer pour qu'elles valeurs de $a, b < 0$ les portraits de phases sont intrinsèquement différents.

b) Dans chaque cas trouver au a), dessiner le portrait de phases.

c) Dans chaque cas trouver au a), décrire les états possibles du système.

Solution. a) L'EDO s'écrit $x'' - ax' - bx = 0$, donc le polynôme associé est $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$. Le discriment est $\Delta = a^2 + 4b$. Il y a trois portraits de phases intrinsèquement différents : lorsque $b > -\frac{a^2}{4}$, lorsque $b = -\frac{a^2}{4}$ et lorsque $b < -\frac{a^2}{4}$.

b) Le système réduit est

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = bx + ay. \end{cases}$$

C'est un système linéaire dont la matrice est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$ et les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{\Delta})$.

1. Lorsque $\Delta = 0$, il y a une seule valeur propre double $\lambda = \frac{a}{2} < 0$ et un vecteur propre $v = \begin{pmatrix} \frac{2}{a} \\ 1 \end{pmatrix}$. Le portrait de phases est un nœud dégénéré stable dont la droite invariante est $y = \frac{a}{2}x$. Le portrait de phases est semblable à celui du 2b).
2. Lorsque $\Delta < 0$, alors il y a deux valeurs propres complexes. Puisque la partie réelle est négative, on a un foyer stable.

3. Lorsque $\Delta > 0$, on a deux valeurs propres réelles. Il est clair que $\lambda_2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{\Delta}) < 0$. On doit vérifier si λ_1 est positif ou négatif pour déterminer la nature du portrait de phases. On a

$$\begin{aligned} a + \sqrt{a^2 - 4b} > 0 &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 - 4b} > -a \\ &\Leftrightarrow a^2 - 4b > a^2 && (\text{car } -a > 0) \\ &\Leftrightarrow -4b > 0 \\ &\Leftrightarrow b < 0, \end{aligned}$$

ce qui est vrai. Ainsi, le portrait de phases est celui d'un col. Les vecteurs propres associés sont $v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm \end{pmatrix}$. La droite $y = \lambda_+ x$ contient les orbites qui s'éloignent de l'origine et la droite $y = \lambda_- x$, celles qui s'approchent.

c) Pour le premier cas, le poids n'oscille pas et il s'approche de la position d'équilibre tranquillement sans jamais l'atteindre.

Pour le deuxième cas, le poids oscille mais de moins en moins intensément à l'infini.

Pour le troisième cas, le modèle ne représente plus un système physique, car la résistance est exagérée et « donne de la vitesse » au poids.

Exercice 6. Un condensateur est relié à une bobine dans un circuit fermé. Soit $q(t)$ la charge dans le condensateur à l'instant t. La résistance dans le circuit est directement proportionnelle au courant électrique, donc on modélise le système par l'EDO $Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = 0$, où L est l'inductance, R est la résistance et C est la capacité du condensateur. Ce sont des constantes positives. Effectuer la même analyse qu'au numéro précédent.

Exercice 7. Un corps en chute libre se meut sous l'effet de la gravité et de la résistance de l'air. On suppose que la résistance de l'air est directement proportionnelle au carré de la vitesse. Ainsi, la chute est modélisée par $y'' = a(y')^2 + b$, où l'axe des y pointes vers le haut, $a > 0$ et $b < 0$.

a) Tracer le champ de vecteurs dans l'espace de phases pour $y' < 0$.

b) Quel état représente le point $\left(0, -\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)$?

Solution. b) Cet état représente le corps qui a atteint sa vitesse limite. Ainsi, la résistance de l'air et la force de gravité s'annulent entre elles et le corps tombe à vitesse constante.