

Équations différentielles

Série 8

Exercice 1. Déterminer la nature des points singuliers des systèmes d'EDO suivants, s'il y a lieu.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } Y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y & \text{b) } Y' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y & \text{c) } Y' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} Y \\ \text{d) } Y' = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} Y & \text{e) } Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} Y & \text{f) } Y' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} Y \end{array}$$

Exercice 2. Pour chacun des systèmes linéaires suivants, tracer le portrait de phases près de l'origine. Dire de quel type de point fixe il s'agit, s'il y a lieu (col, nœud stable, instable, etc.).

$$\begin{array}{ll} \text{a) } Y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y & \text{b) } Y' = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} Y \\ \text{c) } Y' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} Y & \text{d) } Y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} Y \end{array}$$

Exercice 3. Calculer le flot des EDO du numéro précédent.

Exercice 4. Pour chaque EDO, dire s'il est autonome ou non. S'il n'est pas autonome, le transformer en un système équivalent qui est autonome. Indiquer quel l'espace de phases pour chacun.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y'' = y^2 + x^2 & \text{b) } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t - 1 \\ \log t \end{pmatrix} \\ \text{c) } \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv \\ \frac{v}{w} \\ \frac{w-1}{1+u^2+v^2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 5. Un poids attaché à un ressort se meut dans un liquide visqueux. La résistance du liquide est directement proportionnelle à la vitesse du poids. Ainsi, l'EDO $x'' = ax' + bx$ modélise ce système, où $a, b < 0$ et où $x = 0$ est la position d'équilibre du ressort.

- Déterminer pour quelles valeurs de $a, b < 0$ les portraits de phases sont intrinsèquement différents.
- Dans chaque cas trouver au a), dessiner le portrait de phases.
- Dans chaque cas trouver au a), décrire les états possibles du système.

Exercice 6. Un condensateur est relié à une bobine dans un circuit fermé. Soit $q(t)$ la charge dans le condensateur à l'instant t . La résistance dans circuit est directement proportionnel au courant électrique, donc on modélise le système par l'EDO $Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = 0$, où L est l'inductance, R est la résistance et C est la capacité du condensateur. Ce sont des constantes positives. Effectuer la même analyse qu'au numéro précédent.

Exercice 7. Un corps en chute libre se meut sous l'effet de la gravité et de la résistance de l'air. On suppose que la résistance de l'air est directement proportionnelle au carré de la vitesse. Ainsi, la chute est modélisée par $y'' = a(y')^2 + b$, où l'axe des y pointe vers le haut, $a > 0$ et $b < 0$.

a) Tracer le champ de vecteurs dans l'espace de phases pour $y' < 0$.

b) Quel état représente le point $\left(0, -\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)$?